Capítulo 22

Classificação de equações diferenciais

Uma *equação diferencial* é um vínculo que relaciona o valor de uma função com suas derivadas. Seja $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de uma variável x, cujo valor é denotado por $y(x)$. O valor da derivada pode ser denotado de diversas maneiras, sendo as mais comuns $\frac{dy}{dx}$, $y'(x)$ e $\dot{y}(x)$ (esta última normalmente é utilizada quando a variável representa o tempo e é denotada por t).

Funções de uma única variável não possuem distinção entre derivada total e derivada parcial, possuindo apenas derivadas ordinárias. Equações diferenciais que envolvem apenas funções de uma única variável são chamadas de *equações diferenciais ordinárias*. A equação

$$\operatorname{arctanh}\left(y'''(x)\right) \cdot \cos\left(y''(x)\right) + 2\left(y'(x)\right)^2 + \log\left(y(x)\right) + x^3 = 0 \tag{22.1}$$

é uma equação diferencial ordinárias. Dizemos que esta equação é de terceira ordem porque envolve derivadas de até terceira ordem da função y. Uma equação diferencial ordinária de ordem n é portanto um vínculo que depende de $y(x)$ e de suas n primeiras derivadas, sendo que a n-ésima derivada deve aparecer explicitamente na equação, como na definição de polinômio de grau n.

Exemplo 22.1 (Segunda lei de Newton)**.**
A segunda lei de Newton unidimensional

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F\left(t, x(t), \frac{dx}{dt}\right) \tag{22.2}$$

é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem.

Em analogia à definição de sistemas de equações lineares, dizemos que uma equação diferencial ordinária é *linear* se o vínculo que relaciona o valor $y(x)$ e suas derivadas for uma função linear das variáveis y, y', ..., $y^{(n)}$. O vínculo não precisa ser linear na variável x. Então uma equação do tipo

$$a_n(x)y^{(n)}(x)+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x)+\cdots+a_1(x)y'(x)+a_0(x)y(x)=b(x) \quad (22.3)$$

ou apenas

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x)y^{(k)}(x)=b(x) \quad (22.4)$$

é uma *equação diferencial ordinária linear de ordem n*.

Exemplo 22.2 (Oscilador harmônico)**.**
A equação do oscilador harmônico simples, obtida através da segunda lei de Newton e da lei de Hooke,

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+kx(t)=0 \quad (22.5)$$

é uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem, enquanto a equação do pêndulo simples

$$L\frac{d^2\theta}{dt^2}+g\,\mathrm{sen}\,(\theta(t))=0 \quad (22.6)$$

é uma equação diferencial ordinária não-linear de segunda ordem.

Também em analogia aos sistemas lineares, se a função $b(x)$ que aparece na equação (22.4) for identicamente nula, dizemos que a equação diferencial é *homogênea*. Se $b(x)\neq 0$ em algum ponto do domínio, a equação diferencial é *não-homogênea*.

Exemplo 22.3 (Circuito *RLC*)**.**
A equação diferencial

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q(t)=V(t)\ , \quad (22.7)$$

que descreve a carga acumulada em um capacitor de um circuito *RLC* sob uma tensão $V(t)$, é uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem não-homogênea.

Se os coeficientes $a_k(x)$ que aparecem na equação (22.4) são constantes, classificamos a equação diferencial como *com coeficientes constantes*, como no oscilador harmônico simples ou no circuito *RLC*. Se os coeficientes $a_k(x)$ variam de acordo com o valor de x, a equação diferencial é dita *com coeficientes variáveis*.

Exemplo 22.4 (EDO com coeficientes variáveis)**.**
A equação de Euler

$$ax^2y''(x) + bxy'(x) + cy(x) = 0 \,, \tag{22.8}$$

a equação de Airy

$$y''(x) - xy(x) = 0 \,, \tag{22.9}$$

a equação de Legendre

$$(1-x^2)y''(x) - 2xy'(x) + l(l+1)y(x) = 0 \,, \tag{22.10}$$

a equação de Hermite

$$y''(x) - 2xy'(x) + 2\lambda y(x) = 0 \tag{22.11}$$

e a equação de Bessel

$$x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - \nu^2)y(x) = 0 \tag{22.12}$$

são exemplos de equações diferenciais ordinárias lineares homogêneas de segunda ordem com coeficientes variáveis.

Funções de uma única variável são idealizações nem sempre válidas. Em geral os fenômenos que queremos modelar depende de diversas variáveis independentes. Seja u uma função de N variáveis com valor $u(x_1, x_2, \ldots, x_N)$. A variação de u em relação à variável x_k pode ser expressa pela derivada total $\frac{du}{dx_k}$ ou pela derivada parcial $\frac{\partial u}{\partial x_k}$. Com a regra da cadeia podemos expressar a derivada total em termos das derivadas parciais, então equações diferenciais que envolvem funções de várias variáveis podem ser escritas em termos das derivadas parciais apenas. Por este motivo chamamos estas equações de *equações diferenciais parciais*.

Exemplo 22.5 (Equações diferenciais parciais)**.**
A equação da óptica geométrica

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = 1 \tag{22.13}$$

ou apenas

$$\left\|\vec{\nabla} u\right\|^2 = 1 \tag{22.14}$$

é uma equação diferencial parcial de primeira ordem não-linear e não-homogênea de primeira ordem.

O caso mais geral de uma equação diferencial parcial linear de segunda ordem de uma função de duas variáveis $u(x,y)$ é

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+d(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+e(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+f(x,y)u(x,y)=g(x,y) \tag{22.15}$$

Esta equação é *homogênea* se $g(x,y)=0$ e *não-homogênea* se $g(x,y)\neq 0$. Se pelo menos um coeficiente a, b, c, d, e ou f variar de acordo com x ou y, dizemos que a equação é *com coeficientes variáveis*. Se todos estes coeficientes forem constantes dizemos que a equação diferencial é *com coeficientes constantes*. Existem diversas equações diferenciais parciais de interesse na física e na engenharia.

Exemplo 22.6 (Equação de Laplace)**.**
A equação de Laplace

$$\nabla^2 u = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \tag{22.16}$$

é uma equação diferencial parcial linear de segunda ordem homogênea com coeficientes constantes e descreve o potencial eletrostático ou gravitacional no vácuo.

Exemplo 22.7 (Equação de Poisson)**.**
Sob a presença de matéria com densidade de carga $\rho(x,y,z)$, o potencial eletrostático é descrito pela equação de Poisson

$$\nabla^2 u = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}\,, \tag{22.17}$$

que é uma versão não-homogênea da equação de Laplace. O campo gravitacional gerado por uma densidade de massa $\rho(x,y,z)$ é descrito por

$$\nabla^2 u = 4\pi G\rho \tag{22.18}$$

e possui um sinal oposto porque a força gravitacional é atrativa enquanto a força elétrica entre partículas com cargas positivas é repulsiva.

Exemplo 22.8 (Equação de difusão)**.**
A equação

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k\nabla^2 u = 0 \tag{22.19}$$

descreve a propagação do calor em um material com coeficiente de difusão térmica k. Este coeficiente pode ser constante ou pode depender da posição.

Exemplo 22.9 (Equação de onda)**.**
A equação diferencial

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla^2 u = 0 \tag{22.20}$$

descreve a propagação de uma onda com velocidade v.

Exemplo 22.10 (Equação de Helmholtz)**.**
A amplitude de onda num sistema independente do tempo pode ser reduzida à equação de Helmholtz

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0\ , \tag{22.21}$$

onde k é o número de onda.

Exemplo 22.11 (Equação do telégrafo)**.**
A equação diferencial

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \gamma\frac{\partial u}{\partial t} + \eta u(x,t) = 0 \tag{22.22}$$

é uma generalização da equação de onda unidimensional que descreve a tensão e corrente em uma linha de transmissão.

Exemplo 22.12 (Equação de Schrödinger)**.**
A evolução temporal de um sistema quântico é descrito pela equação de Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 u + Vu\ , \tag{22.23}$$

que é uma versão complexa da equação de difusão com potencial V.

Exemplo 22.13 (Equações de Maxwell)**.**
As equações diferenciais

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{22.24}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \tag{22.25}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \tag{22.26}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \tag{22.27}$$

formam um sistema linear de equações diferenciais parciais de primeira ordem chamado equações de Maxwell. Estas equações descrevem os fenômenos de eletromagnetismo clássico.

Exemplo 22.14 (Equações de Euler)**.**
As equações diferenciais

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v}\right)=-\vec{\nabla}p \tag{22.28}$$

descreve o movimento de um fluido perfeito (imcompressível e sem viscosidade) sob efeito de uma pressão p. Este sistema de equações diferenciais é não linear devido ao termo $\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v}$.

Exemplo 22.15 (Equação da continuidade)**.**
Devido ao princípio de conservação de matéria, um fluido compressível deve satisfazer a equação diferencial

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v})=0\ . \tag{22.29}$$

No caso de um fluido imcompressível esta equação se reduz a $\vec{\nabla}\cdot\vec{v}=0$.

Exemplo 22.16 (Equações de Navier-Stokes)**.**
O movimento de um fluido imperfeito, ao considerarmos os efeitos da viscosidade e compressibilidade, satisfaz às equações diferenciais

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v}\right)=-\vec{\nabla}p+\mu\nabla^2\vec{v}+\left(\lambda+\frac{\mu}{3}\right)\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right) \tag{22.30}$$

também conhecidas como equações de Navier-Stokes.

Capítulo 23

Equações Diferenciais Ordinárias de primeira ordem

23.1 Equações diferenciais lineares

A equação diferencial mais simples possível é

$$y'(x) = y(x) \ . \tag{23.1}$$

É trivial verificar que $y(x) = e^x$ é uma solução desta equação diferencial, assim como $y(x) = 2e^x$ ou de maneira mais geral, $y(x) = Ce^x$, onde C é uma constante arbitrária.

Existem infinitas soluções para a equação diferencial $y'(x) = y(x)$ e podemos notar que a curva descrita por cada valor de C nunca cruza uma outra curva definida por um valor diferente de C. Dado um ponto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ existe aparentemente apenas uma curva $y = Ce^x$ que intercepta este ponto.

O ponto (x_0, y_0) é chamado de *condição inicial*. O problema de encontrar a solução de uma equação diferencial ordinária que satisfaz uma certa condição inicial chama-se *Problema de Valor Inicial*.

Teorema 23.1. *O problema de valor inicial*

$$y'(x) = ay(x) \ , \quad y(x_0) = y_0 \tag{23.2}$$

admite uma única solução dada por

$$y(x) = y_0 e^{a(x-x_0)} \ . \tag{23.3}$$

Demonstração. Dividindo a equação diferencial por $y(x)$ encontramos

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = a \ , \tag{23.4}$$

que podemos escrever como uma derivada logarítmica

$$\frac{d}{dx}\left(\log(y(x))\right) = a \; . \tag{23.5}$$

Calculando a integral indefinida encontramos

$$\log(y(x)) = ax + C \; , \tag{23.6}$$

ou seja,

$$y(x) = e^{ax+C} = e^{ax} \cdot e^{C} \; . \tag{23.7}$$

A constante arbitrária C pode ser determinada pela condição inicial $y(x_0) = y_0$.

$$y(x_0) = e^{ax_0} \cdot e^{C} = y_0 \; . \tag{23.8}$$

Isolamos o termo e^C

$$e^C = y_0 e^{-ax_0} \tag{23.9}$$

e substituímos na equação (23.7)

$$y(x) = e^{ax} y_0 e^{-ax_0} = y_0 e^{a(x-x_0)} \; . \tag{23.10}$$

Resta agora mostrar que esta solução é única. Seja então $y(x) = g(x)$ uma solução qualquer deste problema de valor inicial. Queremos provar que $g(x)$ deve ser igual à solução encontrada na equação (23.10).

Seja $h(x) = g(x)e^{-a(x-x_0)}$. Queremos provar que $h(x) = y_0$. Pela regra de Leibniz, a derivada desta nova função é

$$h'(x) = g'(x)e^{-a(x-x_0)} + g(x)e^{-a(x-x_0)}(-a) \; , \tag{23.11}$$

ou seja,

$$h'(x) = e^{-a(x-x_0)} \left(g'(x) - ag(x)\right) \; . \tag{23.12}$$

Como $g(x)$ é solução da equação diferencial $y'(x) = ay(x)$, o termo entre parênteses nesta última equação é nulo, isto é, $h'(x) = 0$ que implica $h(x) = C$, onde C é uma constante que pode ser determinada pela condição inicial.

$$C = h(x_0) = g(x_0)e^{a(x_0-x_0)} = y_0 \; . \tag{23.13}$$

Como $h(x) = y_0$ para todo valor de x, deduzimos que $g(x) = y_0 e^{a(x-x_0)}$, ou seja, deve ser igual à solução já deduzida.

□

Complicando um pouco o problema de valor inicial, podemos "promover" o termo a para uma função de x e obter uma equação diferencial ordinária linear homogênea de primeira ordem com coeficientes variáveis

$$y'(x) + P(x)y(x) = 0 \ , \quad y(x_0) = y_0 \tag{23.14}$$

Se $y_0 = 0$ a função nula $y(x) = 0$ é uma solução deste problema de valor inicial. Suponha então um caso não trivial em que $y_0 \neq 0$. Neste caso a função nula não é solução. Dividindo a equação diferencial por $y(x)$ encontramos

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = -P(x) \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{dx}[\log(y(x))] = -P(x) \ . \tag{23.15}$$

Seja $A(x)$ uma primitiva qualquer de $P(x)$, que podemos escrever como

$$A(x) = \int_a^x P(t)dt \tag{23.16}$$

onde o limite inferior de integração faz o papel da constante arbitrária de integração. Então

$$\log(y(x)) = -A(x) \quad \Longrightarrow \quad y(x) = e^{-A(x)} \ . \tag{23.17}$$

Pela condição inicial $y(x_0) = y_0$ podemos determinar o valor de a.

$$y(x_0) = e^{-A(x_0)} = e^{-\int_a^{x_0} P(t)dt} = y_0 \ . \tag{23.18}$$

Nem sempre é possível isolar o valor de a nesta equação e escrever esta constante em termos de x_0 e y_0. Mas podemos escrever a solução $y(x)$ como

$$y(x) = e^{-\int_a^x P(t)dt} = e^{-\int_a^{x_0} P(t)dt - \int_{x_0}^x P(t)dt} = e^{-\int_a^{x_0} P(t)dt} \cdot e^{-\int_{x_0}^x P(t)dt} = y_0 e^{-\int_{x_0}^x P(t)dt} \ . \tag{23.19}$$

Resta agora saber se esta solução é única. Seja $g(x)$ uma solução do mesmo problema de valor inical. Portanto esta função satisfaz $g'(x) + P(x)g(x) = 0$ e $g(x_0) = y_0$. Queremos provar que necessariamente

$$g(x) = y_0 e^{-\int_{x_0}^x P(t)dt} \quad \text{ou } g(x)e^{\int_{x_0}^x P(t)dt} = y_0 \ . \tag{23.20}$$

Seja então

$$h(x) = g(x)e^{\int_{x_0}^x P(t)dt} \ . \tag{23.21}$$

A derivada desta função é

$$h'(x) = g'(x)e^{\int_{x_0}^{x} P(t)dt} + g(x)e^{\int_{x_0}^{x} P(t)dt}P(x) \tag{23.22}$$

que podemos escrever como

$$h'(x) = e^{\int_{x_0}^{x} P(t)dt} \left[g'(x) + P(x)g(x)\right] \ . \tag{23.23}$$

Como g é solução da equação diferencial em questão, o termo entre colchetes deve ser sempre nulo, portanto $h'(x) = 0$ e $h(x) = C$, que determinamos pela condição inicial.

$$h(x_0) = g(x_0)e^{\int_{x_0}^{x_0} P(t)dt} = y_0 \ . \tag{23.24}$$

Portanto a solução encontrada é única e está demonstrado o seguinte teorema.

Teorema 23.2. *Seja $P(x)$ uma função contínua em um intervalo real. O problema de valor inicial*

$$y'(x) + P(x)y(x) = 0 \ , \quad y(x_0) = y_0 \tag{23.25}$$

possui uma e apenas uma solução dada por

$$y(x) = y_0 e^{-A(x)} \ , \quad \textit{onde} \quad A(x) = \int_{x_0}^{x} P(t)dt \ . \tag{23.26}$$

A condição de que P deve ser contínua é importante porque na dedução da solução utilizamos o teorema fundamental do cálculo.

Passamos agora para o caso mais geral de equações diferenciais ordinárias lineares de primeira ordem, quando a equação não é mais homogênea. Seja o problema de valor inicial

$$y'(x) + P(x)y(x) = Q(x) \ , \quad y(x_0) = y_0 \ . \tag{23.27}$$

Se $Q(x) = 0$ voltamos ao caso homogêneo já resolvido. Se $Q(x) \neq 0$ não conseguimos mais isolar o termo $\frac{y'(x)}{y(x)}$ dividindo a equação diferencial por $y(x)$, então precisamos isolar o termo $y(x)$ de outra maneira. O lado esquerdo da equação diferencial lembra a regra de Leibniz

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)g(x)\right) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x) \ , \tag{23.28}$$

mas falta uma função multiplicando $y'(x)$ para escrever a equação diferencial desta forma. Seja $\mu(x)$ uma função não-nula. A solução da equação diferencial original deve ser também solução da equação diferencial

$$\mu(x)y'(x) + \mu(x)P(x)y(x) = \mu(x)Q(x) \ . \tag{23.29}$$

O lado esquerdo pode ser escrito como a derivada do produto $\mu(x)y(x)$ desde que $\mu'(x) = \mu(x)P(x)$, ou seja, se a função $\mu(x)$ for solução da equação diferencial

$$\mu'(x) - P(x)\mu(x) = 0 \, , \tag{23.30}$$

que é uma equação diferencial ordinária linear homogênea de primeira ordem. Entre as diversas soluções desta equação diferencial, podemos escolher a mais simples,

$$\mu(x) = e^{A(x)} \, , \quad \text{onde} \quad A(x) = \int_{x_0}^{x} P(t)dt \, . \tag{23.31}$$

Multiplicando a equação diferencial não homogênea por $e^{A(x)}$ temos

$$e^{A(x)}y'(x) + e^{A(x)}P(x)y(x) = e^{A(x)}Q(x) \, , \tag{23.32}$$

que podemos escrever como

$$\frac{d}{dx}\left(e^{A(x)}y(x)\right) = e^{A(x)}Q(x) \, , \tag{23.33}$$

que implica

$$e^{A(x)}y(x) = \int_{a}^{x} e^{A(t)}Q(t)dt \tag{23.34}$$

onde novamente o limite de integração inferior faz o papel da constante arbitrária de integração. Isolando $y(x)$ encontramos

$$y(x) = e^{-A(x)} \int_{a}^{x} e^{A(t)}Q(t)dt \, . \tag{23.35}$$

A condição inicial determina o valor de a,

$$y(x_0) = e^{-A(x_0)} \int_{a}^{x_0} e^{A(t)}Q(t)dt = y_0 \, . \tag{23.36}$$

Novamente não precisamos escrever a constante a em termos de x_0 e y_0. Usamos a propriedade de atividade da integral para escrever a solução $y(x)$ como

$$y(x) = e^{-A(x)} \left[\int_{a}^{x_0} e^{A(t)}Q(t)dt + \int_{x_0}^{x} e^{A(t)}Q(t)dt \right] \, . \tag{23.37}$$

A primeira integral deve ser igual a y_0. Portanto a solução do problema de valor inicial em questão é dada por

$$y(x) = y_0 e^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int_{x_0}^{x} e^{A(t)}Q(t)dt \, . \tag{23.38}$$

Queremos agora saber se esta solução é a única solução possível do problema de valor inicial. Suponha que $g(x)$ é também solução do mesmo problema de valor inicial, isto é,

$$g'(x)+P(x)g(x)=Q(x)\ ,\quad g(x_0)=y_0\ . \tag{23.39}$$

Seja $h(x)=y(x)-g(x)$. Queremos provar que $h(x)=0$ para todo valor de x. A derivada desta função é dada por

$$h'(x)=y'(x)-g'(x)=[Q(x)-P(x)y(x)]-[Q(x)-P(x)g(x)]=P(x)(g(x)-h(x))=-P(x)h(x) \tag{23.40}$$

que mostra que h deve ser solução da equação diferencial homogênea

$$h'(x)+P(x)h(x)=0 \tag{23.41}$$

com condição inicial

$$h(x_0)=y(x_0)-g(x_0)=y_0-y_0=0\ . \tag{23.42}$$

A solução deste problema de valor inicial homogêneo já sabemos que é única e dada por $h(x)=h_0e^{-A(x)}=0$, pois a condição inicial neste caso é nula e $e^{-A(x)}$ nunca diverge. Então a diferença entre a solução encontrada $y(x)$ e uma solução qualquer do problema de valor inicial não homogêneo é sempre nula, ou seja, a solução é única como queríamos provar.

Teorema 23.3. *Se P e Q são funções contínuas em um intervalo I, existe uma e apenas uma solução do problema de valor inicial*

$$y'(x)+P(x)y(x)=Q(x)\ ,\quad y(x_0)=y_0 \tag{23.43}$$

no intervalo I dada por

$$y(x)=y_0e^{-A(x)}+e^{-A(x)}\int_{x_0}^{x}e^{A(t)}Q(t)dt\ , \tag{23.44}$$

onde

$$A(x)=\int_{x_0}^{x}P(t)dt\ . \tag{23.45}$$

Exemplo 23.1.
Seja o problema de valor inicial

$$xy'(x)+(1-x)y(x)=e^{2x}\ ,\quad y(1)=1\ . \tag{23.46}$$

Primeiro escrevemos a equação diferencial na forma $y'(x)+P(x)y(x)=Q(x)$. Dividindo a equação por x temos

$$y'(x)+\left(\frac{1}{x}-1\right)y(x)=\frac{e^{2x}}{x}\ , \tag{23.47}$$

ou seja, $P(x)=\frac{1}{x}-1$ e $Q(x)=\frac{e^{2x}}{x}$. Estas funções não são contínuas em $x=0$, portanto só podemos encontrar soluções nos intervalos $(0,+\infty)$ ou $(-\infty,0)$. Como a condição inicial ocorre em $x_0=1$, a solução do problema de valor inicial é válida no intervalo $(0,+\infty)$, ou seja, apenas para valores de $x>0$.

Primeiro calculamos a função $A(x)$, dada por

$$A(x)=\int_{x_0}^{x}P(t)dt=\int_{1}^{x}\left(\frac{1}{t}-1\right)dt=\log(x)-(x-1)\ . \tag{23.48}$$

Assim

$$e^{-A(x)}=e^{-\log(x)+(x-1)}=\frac{e^{x-1}}{x}\ . \tag{23.49}$$

A próxima integral a ser calculada é

$$\int_{x_0}^{x}e^{A(t)}Q(t)dt=\int_{1}^{x}te^{-(t-1)}\frac{e^{2t}}{t}dt=e\int_{1}^{x}e^{t}dt=e(e^{x}-e)\ . \tag{23.50}$$

A solução do problema de valor inicial é dada então por

$$\begin{aligned} y(x) &= y_0e^{-A(x)}+e^{-A(x)}\int_{x_0}^{x}e^{A(t)}Q(t)dt \\ &= 1\cdot\frac{e^{x-1}}{x}+\frac{e^{x-1}}{x}e(e^{x}-e) \\ &= \frac{e^{x-1}}{x}+\frac{e^{x}}{x}(e^{x}-e)\ . \end{aligned} \tag{23.51}$$

Exemplo 23.2 (Queda sob resistência do ar)**.**

Uma partícula de massa m cai devido a uma força gravitacional $F_g=mg$ constante. Se a resistência do ar é proporcional à velocidade, temos uma força dada por $F_r=-bv$, onde b é uma constante positiva indicando que a força é contrária ao movimento. A segunda lei de Newton implica

$$m\frac{dv}{dt}=-bv+mg\ . \tag{23.52}$$

Se inicialmente a partícula possui uma velocidade v_0, a velocidade deve ser solução do problema de valor inicial

$$\frac{dv}{dt}+\frac{b}{m}v(t)=g\ ,\quad v(t_0)=v_0\ . \tag{23.53}$$

Neste caso

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{b}{m} du = \frac{b}{m}(t - t_0) \ , \tag{23.54}$$

$$\int_{t_0}^{t} e^{A(u)} Q(u) du = \int_{t_0}^{t} e^{\frac{b}{m}(u-t_0)} g du = \frac{mg}{b} e^{\frac{b}{m}(u-t_0)} \Big|_{u=t_0}^{u=t} = \frac{mg}{b} \left(e^{\frac{b}{m}(t-t_0)} - 1 \right) \ . \tag{23.55}$$

A solução deste problema de valor inicial é dado então por

$$\begin{aligned} v(t) &= v_0 e^{-\frac{b}{m}(t-t_0)} + e^{-\frac{b}{m}(t-t_0)} \frac{mg}{b} \left(e^{\frac{b}{m}(t-t_0)} - 1 \right) \\ &= v_0 e^{-\frac{b}{m}(t-t_0)} + \frac{mg}{b} \left(1 - e^{-\frac{b}{m}(t-t_0)} \right) \ . \end{aligned} \tag{23.56}$$

As soluções desta equação diferencial possuem uma assíntota horizontal.

$$\lim_{t \to \infty} v(t) = \frac{mg}{b} \ . \tag{23.57}$$

Esta velocidade limite é chamada de *velocidade terminal*, quando a resistência do ar se equilibra com a força da gravidade, mantendo a velocidade constante.

23.2 Equações diferenciais não-lineares

Muitos problemas, como o movimento de um pêndulo com amplitude arbitrária, não podem ser modelados por equações diferenciais lineares. Infelizmente não existe um método geral de solução de equações diferenciais não lineares. Muitas soluções são encontradas por tentativa e erro ou transformando a equação diferencial original em outra equação diferencial cuja solução é conhecida.

Exemplo 23.3.
Seja a equação diferencial

$$y'(x) + \frac{x}{y(x)} = 0 \; . \tag{23.58}$$

As soluções desta equação diferenciais são funções cuja derivada é proporcional ao inverso delas multiplicado por $(-x)$. Funções do tipo $f(x) = A\sqrt{x}$ possuem a propriedade da derivada ser proporcional ao seu inverso. Para aparecer o $-x$ pela regra da cadeia, o argumento deve depender de $-x^2$. Assim podemos verificar que as funções

$$y(x) = \pm\sqrt{a^2 - x^2} \tag{23.59}$$

são soluções da equação diferencial dada. A condição inicial determina o sinal da solução e o valor de a.

Uma equação diferencial não linear de primeira ordem pode ser escrita como uma equação implícita

$$F\left(y'(x), y(x), x\right) = 0 \tag{23.60}$$

ou, se pudermos isolar a variável $y'(x)$, na forma implícita

$$y'(x) = f(x,y) \; . \tag{23.61}$$

Equações lineares de primeira ordem são escritas com $f(x,y) = Q(x) - yP(x)$. Já no exemplo 23.3 temos $f(x,y) = -\frac{x}{y}$. No caso linear com condição inicial $y(x_0) = y_0$ sabemos que a solução sempre existe e é única. No caso não linear a existência de soluções não é garantida, nem a unicidade caso a solução exista.

Exemplo 23.4.
Seja o problema de valor inicial

$$\left(y'(x)\right)^2 - xy'(x) + y(x) + 1 = 0 \; , \quad y(0) = 0 \; . \tag{23.62}$$

Não existe solução real deste problema de valor inicial, pois substituindo $x = 0$ e $y(0) = 0$ na equação diferencial temos

$$\left(y'(0)\right)^2 + 1 = 0 \,, \tag{23.63}$$

o que é impossível para uma função real.

Exemplo 23.5.
O problema de valor inicial

$$y'(x) = 3\,(y(x))^{\frac{2}{3}} \quad , \quad y(0) = 0 \tag{23.64}$$

possui uma solução trivial $y(x) = 0$ em todo x real e uma solução não nula $y_2(x) = x^3$ que satisfazem a mesma condição inicial.

Resumindo, dado um problema de valor inicial $y'(x) = f(x,y)$ e $y(x_0) = y_0$ não há garantia de existência e unicidade de soluções sem especificar a função $f(x,y)$. Em alguns casos que veremos a seguir, existem algoritmos que encontram uma solução.

23.2.1 Equações separáveis

Uma equação diferencial $y'(x) = f(x,t)$ é chamada de *equação diferencial separável* se a função $f(x,y)$ pode ser escrita como o produto de funções de uma única variável, isto é, se existirem funções $b(x)$ e $g(y)$ tal que

$$f(x,y) = b(x)g(y) \,. \tag{23.65}$$

Neste caso escrevemos a equação diferencial como

$$y'(x) = b(x)g(y) \,. \tag{23.66}$$

Se $g(y)$ é uma função identicamente nula a equação diferencial é linear com solução simples. Caso contrário, seja $a(y) = 1/g(y)$. Multiplicando a equação diferencial por $a(y)$ temos

$$a(y(x))y'(x) = b(x) \,. \tag{23.67}$$

As integrais indefinidas dos dois lados desta equação diferem entre si por uma constante arbitrária.

$$\int a(y(x))y'(x)dx = \int b(x)dx + C \,. \tag{23.68}$$

No lado esquerdo desta equação fazemos a mudança de variáveis $y = y(x)$, $dy = y'(x)dx$, resultando sem

$$\int a(y)dy = \int b(x)dx + C \ . \tag{23.69}$$

Seja $A(y)$ alguma primitiva de $a(y)$ e seja também $B(x)$ uma primitiva de $b(x)$. A equação anterior pode ser escrita como

$$A(y) = B(x) + C \ , \tag{23.70}$$

que é uma solução implícita da equação diferencial original. A condição inicial $y(x_0) = y_0$ determina o valor da constante C como

$$C = A(y_0) - B(x_0) \ . \tag{23.71}$$

Se a função $A(y)$ for inversível podemos escrever a solução explicitamente como

$$y(x) = A^{-1}\left[B(x) + C\right] \ . \tag{23.72}$$

Exemplo 23.6.
Seja a equação diferencial

$$xy'(x) + y = y^2 \ . \tag{23.73}$$

Isolando $y(x)$ encontramos

$$y'(x) = \left(y^2 - y\right)\frac{1}{x} \ , \tag{23.74}$$

que é uma equação diferencial separável. Dividindo os dois lados por $(y^2 - y)$ temos

$$\frac{y'(x)}{y^2 - y} = \frac{1}{x} \ . \tag{23.75}$$

Calculando a anti-derivada e já fazendo a substituição $y = y(x)$ chegamos na relação

$$\int \frac{dy}{y^2 - y} = \int \frac{dx}{x} + C \ , \tag{23.76}$$

cujo cálculo de primitivas resulta em

$$\log|y - 1| - \log|y| = \log|x| + C \ . \tag{23.77}$$

Manipulando esta solução encontramos

$$\left|\frac{y-1}{y}\right| = |x|e^C \ . \tag{23.78}$$

O termo e^C é uma constante positiva. Eliminando o módulo, podemos escrever

$$\frac{y-1}{y} = \pm xe^C \ . \tag{23.79}$$

Estas duas soluções podem ser escritas de maneira mais simples definindo $k = \pm e^C$. Se $k \geq 0$ estamos considerando o caso que leva o sinal positivo na equação anterior e se $k < 0$ estamos considerando o sinal negativo. Escrevemos então a solução implícita como

$$\frac{y-1}{y} = kx \tag{23.80}$$

e isolando a variável y encontramos uma solução explícita

$$y(x) = \frac{1}{1-kx} \ . \tag{23.81}$$

A condição inicial $y(x_0) = y_0$ determina o valor da constante k, exceto em alguns casos. No caso da condição inicial $y(x_0) = 0$ temos

$$0 = \frac{1}{1-kx_0} \tag{23.82}$$

e não existe solução desta equação com k real. Portanto não existem soluções do problema de valor inicial $xy'(x) + y = y^2$ com $y(x_0) = 0$ com $x_0 \neq 0$. Curiosamente é simples verificar que a solução identicamente nula $y(x) = 0$ é solução do problema de valor inicial $xy'(x) + y = y^2$ com $y(0) = 0$, no entanto esta solução não pode ser encontrada por este método porque supomos que $y(x)$ não é identicamente nula ao dividir a equação diferencial por $(y^2 - y)$.

Outro caso curioso ocorre com a condição inicial $y(0) = 1$. Substituindo estes valores na solução $y(x) = \frac{1}{1-kx}$ temos

$$1 = \frac{1}{1-k\cdot 0} \tag{23.83}$$

que admite infinitas soluções, pois k pode ter qualquer valor real. Portanto o problema de valor inicial $xy'(x) + y = y^2$ com $y(0) = 1$ admite infinitas soluções distintas.

23.2.2 Funções homogêneas de grau zero

Existe uma categoria de equações diferenciais que apesar de não serem equações separáveis podem por uma substituição serem escritas como uma equação separável. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função real de n variáveis. Dizemos que f é uma função homogênea de grau k se $f(t \cdot \vec{r}) = t^k f(\vec{r})$. Uma transformação linear é um exemplo de funções homogêneas de grau 1, pois se $f(x,y) = ax + by$,

$$f(tx,ty) = a(tx) + b(ty) = t(ax + by) = tf(x,y) \; . \tag{23.84}$$

Uma forma quadrática é uma função homogênea de grau 2, pois se $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$, é simples verificar que $f(tx,ty) = t^2 f(x,y)$. As funções

$$f(x,y) = \frac{y-x}{y+x} \, , \quad f(x,y) = \left(\frac{x^2+y^2}{xy}\right)^3 \, , \quad f(x,y) = \frac{x}{y} \operatorname{sen}\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) \tag{23.85}$$

são todas funções homogêneas de grau 0.

Seja a equação diferencial

$$y'(x) = f(x,y) \; . \tag{23.86}$$

Se f é homogênea de grau 0, podemos escrever $f(x,y) = f(tx,ty)$ para qualquer t real e a equação diferencial como

$$y'(x) = f(tx,ty) \; . \tag{23.87}$$

Escolhendo $t = 1/x$ obtemos

$$y'(x) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) \; . \tag{23.88}$$

A função f agora está escrita como uma função composta de uma única variável $v = y/x$. Desta definição temos que

$$y(x) = x \cdot v(x) \tag{23.89}$$

e

$$y'(x) = x \cdot v'(x) + 1 \cdot v(x) \; . \tag{23.90}$$

Em termos da variável v escrevemos a equação diferencial como

$$x \cdot v'(x) + 1 \cdot v(x) = f(1,v) \tag{23.91}$$

e isolando a derivada $v'(x)$ temos

$$v'(x) = \frac{f(1,v) - v}{x} \, , \tag{23.92}$$

que é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem escrite em termos de uma função separável que pode ser resolvida por um método já deduzido.

Exemplo 23.7.
Seja

$$y'(x) = \frac{y-x}{y+x} . \tag{23.93}$$

Esta equação diferencial é não linear e não é escrita em termos de uma função separável, mas a função em questão é homogênea de grau zero. Dividindo o numerador e o denominador por x temos

$$y'(x) = \frac{\frac{y}{x}-1}{\frac{y}{x}+1} \tag{23.94}$$

e substituindo $y = x \cdot v(x)$ temos

$$x \cdot v'(x) + 1 \cdot v(x) = \frac{v-1}{v+1} . \tag{23.95}$$

Isolando $v'(x)$ temos

$$v'(x) = \left(\frac{v-1}{v+1} - v\right)\frac{1}{x} \tag{23.96}$$

que podemos escrever também como

$$v'(x) = -\left(\frac{1+v^2}{v+1}\right)\frac{1}{x} . \tag{23.97}$$

Passando os termos dependentes de v para o lado esquerdo encontramos

$$\frac{v+1}{1+v^2}v'(x) = -\frac{1}{x} . \tag{23.98}$$

As primitivas destas funções satisfazem

$$\int \frac{v+1}{1+v^2}dv = -\int \frac{1}{x}dx + C , \tag{23.99}$$

que resultam em

$$\frac{1}{2}\log(1+v^2) + \arctan(v) = -\log|x| + C . \tag{23.100}$$

Escrevendo esta solução em termos de x e y temos

$$\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right) + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = -\log|x| + C , \tag{23.101}$$

que podemos escrever também como

$$\frac{1}{2}\log\left(x^2+y^2\right) + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = C , \tag{23.102}$$

onde a constante arbitrária C é determinada pela condição inicial.

23.2.3 Curvas integrais

Antes de aplicar as condições iniciais podemos notar que a solução de uma equação diferencial ordinária de primeira ordem são determinadas a menos de um parâmetro C. Por exemplo, a equação diferencial $y'(x) = y(x)$ possui soluções dadas por $y(x) = Ce^x$, enquanto a equação diferencial $xy'(x) + y = y^2$ possui soluções $y(x) = 0$ ou $y(x) = \frac{1}{1-Cx}$.

A coleção das diversas curvas geradas pelos diversos valores possíveis da constante arbitrária C chama-se *curvas integrais* e representa uma família uniparamétrica de soluções da equação diferencial. Se for possível isolar o parâmetro C e escrevê-lo em termos de x e y, como por exemplo nas soluções $y = Ce^x$ podemos escrever $C = ye^{-x}$, podemos descrever as curvas integrais como curvas de nível de uma função de duas variáveis.

Se conhecermos de antemão uma família de curvas integrais, podemos encontrar a equação diferencial da qual estas curvas integrais são soluções. Calculando a derivada total da equação implícita

$$F(x, y(x)) = C \tag{23.103}$$

temos

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \ , \tag{23.104}$$

de onde obtemos

$$y'(x) = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y} = f(x, y) \ . \tag{23.105}$$

Exemplo 23.8 (Circunferências centradas na origem)**.**

O conjunto de circunferências centradas na origem pode ser escrito como

$$x^2 + y^2 = C \ . \tag{23.106}$$

Calculando a derivada total em relação a x temos

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \ , \tag{23.107}$$

que implica

$$y'(x) = -\frac{x}{y} \ , \tag{23.108}$$

que é a equação diferencial cujas soluções são circunferências centradas na origem.

Exemplo 23.9 (Circunferências de raio C centradas em $(C,0)$)**.**
Seja agora a família de curvas

$$(x-C)^2+y^2=C^2\ . \tag{23.109}$$

Para escrever como curvas de nível escrevemos

$$x^2-2Cx+y^2=0 \tag{23.110}$$

e

$$C=\frac{x^2+y^2}{2x}=\frac{x}{2}+\frac{y^2}{2x}\ . \tag{23.111}$$

Aplicando a derivada total em relação a x temos

$$\frac{1}{2}-\frac{y^2}{2x^2}+\frac{2y}{2x}\frac{dy}{dx}=0 \tag{23.112}$$

ou

$$y'(x)=\frac{x}{y}\left(\frac{y^2}{2x^2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{y^2-x^2}{2xy}\ , \tag{23.113}$$

que é uma equação diferencial não linear de primeira ordem escrita em termos de uma função homogênea de grau zero.

23.2.4 Equações diferenciais exatas

Vimos que dada família de curvas $F(x,y) = C$ podemos encontrar uma equação diferencial da qual esta família é o conjunto de soluções calculando a derivada total desta função em relação à variável x, resultando em

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0\ , \tag{23.114}$$

ou

$$y'(x) = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y} = f(x,y)\ . \tag{23.115}$$

Em outras palavras, a equação diferencial $y'(x) = f(x,y)$ possui soluções dadas por $F(x,y) = C$ se pudermos escrever

$$f(x,y) = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}\ . \tag{23.116}$$

Exemplo 23.10.
Seja

$$y'(x) = -\frac{2xy^2+1}{2x^2y}\ . \tag{23.117}$$

Esta equação diferencial ordinária de primeira ordem não é linear, não é separável e nem pode ser escrita em termos de uma função homogênea de grau zero. Mas ela pode ser escrita em termos das derivadas parciais de uma função de duas variáveis na forma

$$-\frac{2xy^2+1}{2x^2y} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y} \tag{23.118}$$

se existir um campo escalar F tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy^2+1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2x^2y \tag{23.119}$$

ou equivalentemente se existir um potencial escalar $F(x,y)$ tal que

$$\vec{\nabla}F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)) = \left(2xy^2+1, 2x^2y\right)\ . \tag{23.120}$$

Do cálculo de integrais de linha sabemos que tal potencial escalar existe por definição se o campo vetorial $(P(x,y), Q(x,y))$ for conservativo. Uma condição necessária para um campo vetorial diferenciável ser conservativo é

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0\ , \tag{23.121}$$

que torna-se uma condição necessária e suficiente se ela for válida em um conjunto aberto convexo. No exemplo em questão,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2x^2y) = 4xy\ , \tag{23.122}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2xy^2+1) = 4xy \tag{23.123}$$

e

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 4xy - 4xy = 0\ . \tag{23.124}$$

Como esta condição é válida em todo o $\mathbb{R}^2$, que é um conjunto aberto e convexo, e as funções P e Q são polinômios e portanto diferenciáveis no $\mathbb{R}^2$, este campo vetorial é conservativo. Podemos então calcular o potencial escalar pelo método da integral indefinida.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy^2+1 \implies F(x,y) = x^2y^2 + x + A(y)\ . \tag{23.125}$$

Derivando este resultado em relação a y e comparando com $Q(x,y)$ temos

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2x^2y + \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}y} = 2x^2y \implies g(y) = B\ , \tag{23.126}$$

onde B é uma constante arbitrária. A família de soluções da equação diferencial

$$y'(x) = -\frac{2xy^2+1}{2x^2y}\ . \tag{23.127}$$

é dada pelas curvas de nível de qualquer potencial escalar. Então a condição $F(x,y) = C$ implica $x^2y^2 + x + B = C$. Podemos absorver a constante arbitrária B no valor da constante C (ou equivalentemente definir $C_2 = C - B$ e retirar o índice de C_2) e escrever as soluções desta equação diferencial como

$$x^2y^2 + x = C\ . \tag{23.128}$$

A condição inicial $y(x_0) = y_0$ determina o valor de C.

23.2.4.1 Equações diferenciais exatas

Voltando ao caso de uma equação diferencial ordinária de primeira ordem escrita na forma $y'(x) = f(x,y)$, sabendo que se as variáveis x e y estão relacionadas por $y = y(x)$, os diferenciais dx e dy estão relacionados de acordo com a regra da cadeia por

$$\mathrm{d}y = y'(x)\mathrm{d}x \; , \tag{23.129}$$

o que nos permite escrever

$$\mathrm{d}y = f(x,y)\mathrm{d}x \; . \tag{23.130}$$

Multiplicando os dois lados por uma função $Q(x,y)$ e definindo uma nova função tal que $P(x,y) = -f(x,y)Q(x,y)$, escrevemos a relação entre os diferenciais dx e dy como

$$P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0 \; . \tag{23.131}$$

Esta equação é chamada de *equação diferencial exata* se pudermos escrevê-la como o diferencial exato de um campo escalar de duas variáveis

$$\mathrm{d}F(x,y) = 0 \; , \tag{23.132}$$

cuja solução é $F(x,y) = C$.

Exemplo 23.11.
A equação diferencial

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{2xy^2+1}{2x^2y} \tag{23.133}$$

pode ser escrita como

$$(2xy^2+1)\mathrm{d}x + (2x^2y)\mathrm{d}y = 0 \; , \tag{23.134}$$

que é uma equação diferencial exata pois existe um campo escalar $F(x,y) = x^2y^2 + x$ tal que

$$\mathrm{d}F(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial F}{\partial y}\mathrm{d}y = (2xy^2+1)\mathrm{d}x + (2x^2y)\mathrm{d}y \; . \tag{23.135}$$

Portanto as soluções desta equação diferencial exata são dadas por $x^2y^2 + x = C$ como já visto.

O algoritmo usado para resolver uma equação diferencial exata é o seguinte. Seja a equação

$$P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0 \; . \tag{23.136}$$

Primeiro verificamos se esta equação é de fato exata, isto é, se pode ser escrita como $\vec{\nabla}F \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$. A condição necessária para tal é

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \,, \tag{23.137}$$

que torna-se necessária e suficiente se for válida em uma região aberta convexa em que as funções P e Q são diferenciáveis.

Após verificarmos a condição necessária e suficiente, calculamos algum potencial escalar do campo vetorial $(P(x,y), Q(x,y))$ por algum método qualquer. As soluções da equação diferencial exata são as curvas de nível do potencial escalar encontrado.

Exemplo 23.12.

Seja a equação diferencial

$$(x+2y)\mathrm{d}x + (2x+y)\mathrm{d}y = 0 \,. \tag{23.138}$$

Neste caso temos $P(x,y) = x+2y$ e $Q(x,y) = 2x+y$, que são polinômios e portanto diferenciáveis em todo o $\mathbb{R}^2$. Testando a condição necessária temos

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2-2 = 0 \tag{23.139}$$

em todo o $\mathbb{R}^2$, que é um conjunto aberto e convexo.

Calculando o potencial escalar temos

$$\frac{\partial F}{\partial x} = x+2y \implies F(x,y) = \frac{x^2}{2} + 2xy + A(y) \,. \tag{23.140}$$

Derivando este resultado em relação a y e comparando com $Q(x,y)$ temos

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}y} = 2x+y \implies g(y) = \frac{y^2}{2} + B \tag{23.141}$$

onde B é uma constante arbitrária que podemos escolher como sendo nula. Portanto o potencial escalar encontrado é $F(x,y) = \frac{x^2}{2} + 2xy + \frac{y^2}{2}$ e as soluções da equação diferencial são dadas por

$$\frac{x^2}{2} + 2xy + \frac{y^2}{2} = C \,. \tag{23.142}$$

Exemplo 23.13.

Seja a equação diferencial

$$-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y = 0 \,. \tag{23.143}$$

Neste caso temos $P(x,y) = -y$, $Q(x,y) = x$ e

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 - (-1) = 2 \neq 0 \,, \tag{23.144}$$

portanto esta equação diferencial não é exata e não pode ser resolvida por este método. No entando podemos escrever a equação diferencial como

$$y'(x) = \frac{y}{x} \,, \tag{23.145}$$

que é uma equação linear com soluções $y(x) = Cx$.

23.2.4.2 Fator integrante

Voltando ao caso da equação diferencial

$$y'(x) = -\frac{2xy^2+1}{2x^2y} \,, \tag{23.146}$$

cujas soluções $x^2y^2 + x = C$ podem ser encontradas escrevendo

$$(2xy^2+1)\mathrm{d}x + (2x^2y)\mathrm{d}y = 0 \,, \tag{23.147}$$

que é uma equação diferencial exata. No entanto esta mesma equação diferencial poderia também ser escrita na forma

$$\frac{2xy^2+1}{2x^2y}\mathrm{d}x + \mathrm{d}y = 0 \tag{23.148}$$

ou

$$\mathrm{d}x + \frac{2x^2y}{2xy^2+1}\mathrm{d}y = 0 \,, \tag{23.149}$$

que não são equações diferenciais exatas.

Neste caso convenientemente a maneira mais simples de escrever a equação em termos dos diferenciais dx e dy é uma equação exata, mas o caso geral nem sempre é conveniente como este. No entanto, nos dois casos não exatos podemos multiplicar a equação diferencial por uma função e obter uma equação exata. Esta liberdade de multiplicar a equação diferencial não exata por um campo escalar sugere um método conhecido como *método dos fatores integrantes*.

Seja uma equação diferencial escrita na forma

$$P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0 \tag{23.150}$$

que não é exata por não satisfazer a condição necessária, ou seja, tal que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \neq 0 \,. \tag{23.151}$$

Se multiplicarmos a equação por uma função $\mu(x,y)$ temos

$$\mu(x,y)P(x,y)\mathrm{d}x + \mu(x,y)Q(x,y)\mathrm{d}y = 0 \,. \tag{23.152}$$

Queremos saber se existe uma função $\mu(x,y)$ tal que esta equação seja exata. Para isso é necessário que

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu \cdot Q) - \frac{\partial}{\partial y}(\mu \cdot P) = 0 \,, \tag{23.153}$$

que implica

$$Q(x,y)\frac{\partial \mu}{\partial x} - P(x,y)\frac{\partial \mu}{\partial y} + \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right]\mu(x,y) = 0 \,. \tag{23.154}$$

Esta equação é uma equação diferencial parcial linear de primeira ordem. Apesar de se tratar de uma equação linear, pode ser mais difícil resolver esta equação diferencial para $\mu(x,y)$ que a equação diferencial original. Caso exista tal função, chamamos $\mu(x,y)$ de *fator integrante*.

Exemplo 23.14.
Seja

$$y\mathrm{d}x + 2x\mathrm{d}y = 0 \,. \tag{23.155}$$

Esta equação não é exata, pois

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2 - 1 = 1 \neq 0 \,. \tag{23.156}$$

Um fator integrante, se existir, deve ser solução da equação diferencial parcial

$$2x\frac{\partial \mu}{\partial x} - y\frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu = 0 \,. \tag{23.157}$$

Podemos procurar soluções por tentativa e erro. É simples verificar que a função $\mu_1(x,y) = y$ é solução, pois

$$2x\frac{\partial \mu_1}{\partial x} - y\frac{\partial \mu_1}{\partial y} + \mu_1 = 2x \cdot 0 - y \cdot 1 + y = 0 \,. \tag{23.158}$$

Esta solução no entanto não é única. Continuando a tentativa e erro encontramos $\mu_2(x,y) = 1/\sqrt{x}$, que satisfaz

$$2x\frac{\partial\mu_2}{\partial x} - y\frac{\partial\mu_2}{\partial y} + \mu_2 = 2x\left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\right) - y\cdot 0 + x^{-\frac{1}{2}} = 0\ . \tag{23.159}$$

Além destas soluções podemos encontrar uma terceira solução $\mu(x,y) = 2xy^3$, que satisfaz

$$2x\frac{\partial\mu_3}{\partial x} - y\frac{\partial\mu_3}{\partial y} + \mu_3 = 2x(2y^3) - y(6xy^2) + 2xy^3 = 0\ . \tag{23.160}$$

Partindo da equação inexata $y\mathrm{d}x + 2x\mathrm{d}y = 0$ podemos obter três equações diferenciais exatas dependendo do fator integrante utilizado dadas por

$$\mu_1: \quad y^2\mathrm{d}x + 2xy\mathrm{d}y = 0\ , \tag{23.161}$$

$$\mu_2: \quad x^{-\frac{1}{2}}y\mathrm{d}x + 2x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y = 0\ , \tag{23.162}$$

$$\mu_3: \quad 2xy^4\mathrm{d}x + 4x^2y^3\mathrm{d}y = 0\ . \tag{23.163}$$

Resolvendo a primeira equação exata encontramos a família de soluções $xy^2 = C$. A segunda equação exata possui soluções da forma $\sqrt{x}y = C$ enquanto a terceira admite soluções $x^2y^4 = C$. Em todos estes casos se isolarmos a variável y para encontrar uma função explícita temos soluções da forma

$$y(x) = \frac{C}{\sqrt{x}}\ . \tag{23.164}$$

23.2.4.3 Fatores integrantes de uma única variável.

O caso geral

$$Q(x,y)\frac{\partial\mu}{\partial x} - P(x,y)\frac{\partial\mu}{\partial y} + \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right]\mu(x,y) = 0 \tag{23.165}$$

como dito pode ser complicado, mas existem casos particulares convenientes, quando o fator integrante depende apenas da variável x ou apenas da variável y.

Se $\mu = \mu(x)$, as derivadas parciais são $\frac{\partial\mu}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x}$ e $\frac{\partial\mu}{\partial y} = 0$. Assim a equação diferencial parcial torna-se uma equação diferencial ordinária

$$Q(x,y)\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x} + \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right]\mu = 0 \tag{23.166}$$

que podemos escrever como

$$\frac{1}{\mu(x)}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x} = -\frac{\left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right]}{Q(x,y)} \ . \tag{23.167}$$

Se μ depende apenas de x, o lado esquerdo desta última equação deve também depender apenas de x. Então para existir fator integrante que depende apenas de x o lado direito da equação deve também depender apenas de x, isto é,

$$-\frac{\left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right]}{Q(x,y)} = f(x) \ , \tag{23.168}$$

que implica na solução

$$\mu(x) = e^{\int f(x)\mathrm{d}x} \ . \tag{23.169}$$

Da mesma forma, se existir um fator integrante dependente apenas de y, $\frac{\partial \mu}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}y}$ e o fator integrante satisfaz

$$-P(x,y)\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}y} + \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right]\mu = 0 \tag{23.170}$$

ou

$$\frac{1}{\mu(y)}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}y} = \frac{\left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right]}{P(x,y)} \ . \tag{23.171}$$

Novamente podemos encontrar um fator integrante que depende apenas de y somente se

$$\frac{\left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right]}{P(x,y)} = g(y) \ , \tag{23.172}$$

que implica na solução

$$\mu(y) = e^{\int g(y)\mathrm{d}y} \ . \tag{23.173}$$

Exemplo 23.15.

Na equação diferencial

$$y\mathrm{d}x + 2x\mathrm{d}y = 0 \tag{23.174}$$

temos $P(x,y) = y$, $Q(x,y) = 2x$ e $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$.

Neste caso

$$-\frac{\left[\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right]}{Q(x,y)}=-\frac{1}{2x} \tag{23.175}$$

que depende apenas de x, portanto existe um fator integrante que depende apenas de x dado por

$$\mu(x)=e^{\int -\frac{1}{2x}\mathrm{d}x}=e^{-\frac{1}{2}\log|x|}=\frac{1}{\sqrt{|x|}} \tag{23.176}$$

ou apenas $\mu(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ se $x>0$.

Além desta solução podemos encontrar um fator integrante que depende apenas de y, pois

$$\frac{\left[\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right]}{P(x,y)}=\frac{1}{y} \tag{23.177}$$

e existe um fator integrante

$$\mu(y)=e^{\int \frac{1}{y}\mathrm{d}y}=e^{\log|y|}=|y| \tag{23.178}$$

ou apenas $\mu(y)=y$ se $y>0$.

Como visto, qualquer um destes fatores integrantes levam à solução explícita $y(x)=\frac{C}{\sqrt{x}}$. Este método não é capaz de encontrar o terceiro fator integrante.

Exemplo 23.16.

Seja agora

$$(2x^2+y)\mathrm{d}x+(x^2y-x)\mathrm{d}y=0\ . \tag{23.179}$$

Esta equação não é exata, pois

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=2xy-1-1=2xy-2\neq 0\ . \tag{23.180}$$

Não podemos encontrar fator integrante que depende apenas de y, pois

$$\frac{\left[\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right]}{P(x,y)}=\frac{2xy-2}{2x^2+y} \tag{23.181}$$

que não é uma função só de y. No entanto

$$-\frac{\left[\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right]}{Q(x,y)}=-\frac{2xy-2}{x^2y-x}=-\frac{2(xy-1)}{x(xy-1)}=-\frac{2}{x}\ . \tag{23.182}$$

Logo existe um fator integrante

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{2}{x}\mathrm{d}x} = e^{-2\log|x|} = \frac{1}{x^2} \ , \tag{23.183}$$

que nos leva à equação diferencial exata

$$\left(2 + \frac{y}{x^2}\right)\mathrm{d}x + \left(y - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}y = 0 \ . \tag{23.184}$$

Se $F(x,y)$ é um potencial escalar,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2 + \frac{y}{x^2} \implies F(x,y) = 2x - \frac{y}{x} + A(y) \ , \tag{23.185}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{1}{x} + \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}y} = y - \frac{1}{x} \implies A(y) = \frac{y^2}{2} + B \ . \tag{23.186}$$

Escolhendo a constante arbitrária como $B = 0$ o potencial escalar é dado por $F(x,y) = 2x - \frac{y}{x} + \frac{y^2}{2}$ e as soluções da equação diferencial são dadas por

$$2x - \frac{y}{x} + \frac{y^2}{2} = C \ . \tag{23.187}$$

Exemplo 23.17.
Seja o problema de valor inicial

$$y'(x) + P(x)y = Q(x) \ , y(x_0) = y_0 \ , \tag{23.188}$$

que pode ser escrita como

$$[P(x)y - Q(x)]\,\mathrm{d}x + 1\mathrm{d}y = 0 \ . \tag{23.189}$$

Escrevendo esta equação na forma $\bar{P}(x,y)\mathrm{d}x + \bar{Q}(x,y)\mathrm{d}y = 0$ identificamos $\bar{P}(x,y) = P(x)y - Q(x)$ e $\bar{Q}(x,y) = 1$. Neste caso

$$-\frac{\left[\frac{\partial\bar{Q}}{\partial x} - \frac{\partial\bar{P}}{\partial y}\right]}{\bar{Q}(x,y)} = -\frac{-P(x)}{1} = P(x) \tag{23.190}$$

que é uma função de x apenas, portanto existe um fator integrante $\mu(x) = e^{A(x)}$ onde

$$A(x) = \int_{x_0}^{x} P(t)dt \ . \tag{23.191}$$

A equação diferencial exata obtida é

$$e^{A(x)}\left[P(x)y - Q(x)\right]\mathrm{d}x + e^{A(x)}\mathrm{d}y = 0 \ . \tag{23.192}$$

O potencial escalar $F(x,y)$ deve satisfazer

$$\frac{\partial F}{\partial y} = e^{A(x)} \implies F(x,y) = ye^{A(x)} + G(x) \ . \tag{23.193}$$

Derivando em relação a x temos

$$\frac{\partial F}{\partial x} = e^{A(x)}P(x)y + G'(x) = e^{A(x)}\left[P(x)y - Q(x)\right] \ , \tag{23.194}$$

que implica

$$G'(x) = -e^{A(x)}Q(x) \text{ e } G(x) = -\int_{x_0}^{x} e^{A(t)}Q(t)\mathrm{d}t \ . \tag{23.195}$$

O potencial escalar é dado então por

$$F(x,y) = ye^{A(x)} - \int_{x_0}^{x} e^{A(t)}Q(t)\mathrm{d}t \tag{23.196}$$

e as soluções da equação diferencial por

$$C = ye^{A(x)} - \int_{x_0}^{x} e^{A(t)}Q(t)\mathrm{d}t \ . \tag{23.197}$$

Determinamos o valor de C pela condição inicial $y(x_0) = y_0$, que implica $C = y_0 e^{A(x_0)} = y_0$. Isolando a variável x na solução encontramos

$$y(x) = y_0 e^{-A(x)} + e^{-A(x)}\int_{x_0}^{x} e^{A(t)}Q(t)\mathrm{d}t \ . \tag{23.198}$$

23.2.5 Substituições

Vimos que uma equação diferencial ordinária

$$y'(x) = f(x,y) \tag{23.199}$$

onde f é uma função homogênea de grau zero, podemos escrevê-la como

$$y'(x) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) , \tag{23.200}$$

o que nos permitiu definir uma variável $v = y/x$ e obter a equação diferenciável

$$xv'(x) + v = f(1,v) . \tag{23.201}$$

Agora a função f depende de apenas uma variável v e a equação diferencial é separável.

Exemplo 23.18.

Seja

$$y'(x) = \frac{xy + y^2 + x^2}{x^2} , \tag{23.202}$$

que podemos escrever também como

$$y'(x) = \left(\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1 . \tag{23.203}$$

Definindo $y(x) = xv(x)$ temos a equação diferencial

$$xv'(x) + v = v + v^2 + 1 \tag{23.204}$$

que rearranjamos como

$$\frac{v'(x)}{1+v^2} = \frac{1}{x} . \tag{23.205}$$

Calculando a integral indefinida temos

$$\int \frac{dv}{1+v^2} = \frac{dx}{x} \implies \arctan(v) = \log(|x|) + C \tag{23.206}$$

ou

$$v(x) = \tan\left(\log|x| + C\right) . \tag{23.207}$$

Voltando à variável y temos uma família de soluções dada por

$$y(x) = x \cdot \tan\left(\log|x| + C\right) . \tag{23.208}$$

Este método consiste em, pela substituição $y(x) = x \cdot v(x)$ transformar uma equação diferencial ordinária que não sabemos resolver em uma outra equação diferencial em termos de $v(x)$ expressa em termos de uma função separável, que já sabemos resolver. Esta substituição é conveniente quando temos uma equação diferencial escrita em termos de uma função homogênea de grau zero. Existem outros casos da função $f(x,y)$ que admitem substituições convenientes.

23.2.5.1 Funções do tipo $f(x,y) = g(ax+by)$

Seja a equação diferencial $y'(x) = f(x,y)$ onde agora $f(x,y)$ é a composição de uma função de uma única variável $g(u)$ e uma transformação linear $u(x,y) = ax+by$. Por exemplo, a função

$$f(x,y) = \log(2x+3y+\tanh(4x+6y)) \tag{23.209}$$

é a composição de

$$g(u) = \log(u+\tanh(2u)) \text{ com } u(x,y) = 2x+3y\ . \tag{23.210}$$

Escrevemos neste caso a equação diferencial ordinária como

$$y'(x) = g(ax+by)\ . \tag{23.211}$$

Se $a = 0$ ou $b = 0$ esta equação é separável. Estamos interessados nos casos em que estes valores são diferentes de zero. Definindo a substituição

$$z(x) = ax+by(x) \tag{23.212}$$

temos que

$$z'(x) = a+by'(x) \tag{23.213}$$

e isolando $y'(x)$ encontramos

$$y'(x) = \frac{1}{b}z'(x) - \frac{a}{b} \tag{23.214}$$

e escrevemos a equação diferencial que queremos resolver como

$$\frac{1}{b}z'(x) - \frac{a}{b} = g(z) \tag{23.215}$$

ou

$$z'(x) = a+bg(z) \tag{23.216}$$

que é uma equação diferencial separável e pode ser resolvida calculando uma primitiva de $\frac{1}{a+bg(z)}$.

Exemplo 23.19.
Seja

$$y'(x) = y-x-1-(x-y+2)^{-1}\ . \tag{23.217}$$

Podemos escrever $f(x,y)$ como função de $x-y$ na forma

$$f(x,y) = -(x-y) - 1 - [(x-y)+2]^{-1} \ . \tag{23.218}$$

Com a substituição $z = x-y$ temos $z'(x) = 1 - y'(x)$ e

$$1 - z'(x) = -z - 1 - (z+2)^{-1} \tag{23.219}$$

ou

$$z'(x) = (z+2) + \frac{1}{z+2} = \frac{(z+2)^2+1}{(z+2)} \ . \tag{23.220}$$

Esta equação diferencial é separável que resolvemos por um método conhecido.

$$\frac{(z+2)}{(z+2)^2+1} z'(x) = 1 \ , \tag{23.221}$$

$$\int \frac{(z+2)}{(z+2)^2+1} dz = \int dx \ , \tag{23.222}$$

$$\frac{1}{2} \log\left((z+2)^2+1\right) = x + C \ , \tag{23.223}$$

$$(z+2)^2 + 1 = Ce^{2x} \ . \tag{23.224}$$

Voltando para a variável y temos

$$(x-y+2)^2 + 1 = Ce^{2x} \tag{23.225}$$

que é uma família de soluções da equação diferencial original.

23.2.5.2 Funções do tipo $f(x,y) = \frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}$

Seja a equação diferencial

$$y'(x) = \frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2} \ , \tag{23.226}$$

ou seja, expressa em termos de uma razão entre funções de até primeiro grau nas variáveis x e y, que pode surgir de uma aproximação de uma equação diferencial mais complicada. Antes de analisar o caso geral é interessante mencionar alguns casos particulares.

Se $b_2 = 0$, escrevemos a equação diferencial como

$$y'(x) = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + c_2} = \frac{a_1x + c_1}{a_2x + c_2} + \frac{b_1}{a_2x + c_2}y \tag{23.227}$$

que é uma equação linear.

Se $b_2 \neq 0$ e $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, escrevemos a equação diferencial como

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2} \\ &= \frac{\frac{a_2b_1}{b_2}x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2} \\ &= \frac{1}{b_2}\frac{a_2b_1x + b_1b_2y + b_2c_1}{a_2x + b_2y + c_2} \\ &= \frac{1}{b_2}\frac{b_1u + b_2c_1}{u + c_2} \end{aligned} \tag{23.228}$$

com $u(x,y) = a_2x + b_2y$, caso que pode ser reduzido a uma equação separável com a substituição $z(x) = a_2x + b_2y(x)$ e que já sabemos resolver.

Se $c_1 = 0$ e $c_2 = 0$ a equação diferencial

$$y'(x) = \frac{a_1x + b_1y}{a_2x + b_2y} \tag{23.229}$$

é escrita em termos de uma função homogênea de grau zero que pode ser resolvida pela substituição $v(x) = \frac{y(x)}{x}$.

Seja então o caso geral em que $b_2 \neq 0$, $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ e $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$. O nosso objetivo agora é fazer uma translação nas coordenadas x e y de modo que os termos correspondentes a c_1 e c_2 na nova equação diferencial sejam nulos. Definimos

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x - x_0 , \\ \bar{y} &= y - y_0 , \end{aligned}$$

onde x_0 e y_0 são constantes. Desta forma

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 &= a_1\bar{x} + b_1\bar{y} + a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 , \\ a_2x + b_2y + c_2 &= a_2\bar{x} + b_2\bar{y} + a_2x_0 + b_2y_0 + c_2 . \end{aligned}$$

Escolhemos x_0 e y_0 de modo que

$$\begin{aligned} a_1x_0 + b_1y_0 &= -c_1 , \\ a_2x_0 + b_2y_0 &= -c_2 . \end{aligned}$$

Este sistema linear possui uma única solução, pois sabemos que $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$. Após encontrarmos os valores de x_0 e y_0, escrevemos a equação diferencial em termos das variáveis $\bar{x}$ e $\bar{y}$ a equação diferencial é escrita como

$$\frac{\mathrm{d}\bar{y}}{\mathrm{d}\bar{x}} = \frac{a_1\bar{x} + b_1\bar{y}}{a_2\bar{x} + b_2\bar{y}} , \tag{23.230}$$

expressa agora em termos de uma função homogênea de grau zero.

Exemplo 23.20.

A equação diferencial

$$y'(x) = \frac{3x - y - 6}{x + y + 2} \tag{23.231}$$

é um caso em que $b_2 = 1$, $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 4$, $c_1 = -6$ e $c_2 = 2$. Primeiro encontramos a solução do sistema linear

$$\begin{aligned} 3x_0 - y_0 &= 6 , \\ x_0 + y_0 &= -2 , \end{aligned}$$

que são $x_0 = 1$ e $y_0 = -3$. Nas coordenadas $\bar{x} = x - 1$ e $\bar{y} = y + 3$ a equação diferencial é dada por

$$\frac{\mathrm{d}\bar{y}}{\mathrm{d}\bar{x}} = \frac{3\bar{x} - \bar{y}}{\bar{x} + \bar{y}} = \frac{3 - \left(\frac{\bar{y}}{\bar{x}}\right)}{1 + \left(\frac{\bar{y}}{\bar{x}}\right)} . \tag{23.232}$$

Definindo $v(\bar{x}) = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}$ chegamos na equação diferencial separável

$$\bar{x}v'(\bar{x}) + v = \frac{3 - v}{1 + v} , \tag{23.233}$$

que manipulamos como

$$\bar{x}v'(\bar{x}) = \frac{3 - v}{1 + v} - v = \frac{3 - v - v(1 + v)}{1 + v} = -\frac{v^2 + 2v - 3}{v + 1} , \tag{23.234}$$

que separamos como

$$\frac{v + 1}{v^2 + 2v - 3} v'(\bar{x}) = -\frac{1}{\bar{x}} . \tag{23.235}$$

Calculando a primitiva temos

$$\int \frac{v + 1}{v^2 + 2v - 3} \mathrm{d}v = -\int \frac{1}{\bar{x}} \mathrm{d}\bar{x} \tag{23.236}$$

cuja solução é

$$\frac{1}{2}\log\left|v^2+2v-3\right| = -\log|\bar{x}|+C \tag{23.237}$$

ou

$$v^2+2v-3 = \frac{C}{\bar{x}^2} . \tag{23.238}$$

Voltando à variável $\bar{y}$ temos

$$(\frac{\bar{y}}{\bar{x}})^2+2(\frac{\bar{y}}{\bar{x}})-3 = \frac{C}{\bar{x}^2} \tag{23.239}$$

que simplificamos como

$$\bar{y}^2+2\bar{x}\bar{y}-3\bar{x}^2 = C . \tag{23.240}$$

Finalmente voltando às variáveis originais, substituímos $\bar{x} = x-1$, $\bar{y} = y+3$ e encontramos

$$(y+3)^2+2(x-1)(y+3)-3(x-1)^2 = C \tag{23.241}$$

como família de soluções da equação diferencial original.

23.2.6 Equações de Bernoulli

Uma equação diferencial escrita na forma

$$y'(x)+P(x)y(x) = Q(x)y^n(x) \tag{23.242}$$

é chamada de *equação de Bernoulli*. Se $n=0$ temos uma equação linear não-homogênea. Se $n=1$ temos uma equação linear homogênea, casos que já sabemos como resolver. Estamos interessados nos casos em que $n \neq 0$ e $n \neq 1$, em que a equação de Bernoulli é não-linear.

Definimos a mudança de variáveis

$$v(x) = [y(x)]^{1-n} \tag{23.243}$$

ou

$$y(x) = [v(x)]^{\frac{1}{1-n}} . \tag{23.244}$$

Pela regra da cadeia

$$y'(x) = \frac{1}{1-n}[v(x)]^{\frac{1}{1-n}-1}v'(x) = \frac{1}{1-n}\frac{v^{\frac{1}{1-n}}}{v}v'(x) . \tag{23.245}$$

Substituindo na equação diferencial temos

$$\frac{1}{1-n}\frac{v^{\frac{1}{1-n}}}{v}v'(x)+P(x)v^{\frac{1}{1-n}}=Q(x)v^{\frac{n}{1-n}}\ . \tag{23.246}$$

Multiplicamos a equação diferencial por $v/v^{\frac{1}{1-n}}$ para obter

$$\frac{1}{1-n}v'(x)+P(x)\frac{v}{v^{\frac{1}{1-n}}}v^{\frac{1}{1-n}}=Q(x)v^{\frac{n}{1-n}}\frac{v}{v^{\frac{1}{1-n}}}\ . \tag{23.247}$$

O termo que multiplica a função $Q(x)$ é

$$v^{\frac{n}{1-n}}\cdot v\cdot v^{-\frac{1}{1-n}}=v^{\left[\frac{n}{1-n}+1-\frac{1}{1-n}\right]}=v^{\frac{n+1-n-1}{1-n}}=v^0=1\ . \tag{23.248}$$

Assim a equação diferencial resultante é

$$\frac{1}{1-n}v'(x)+P(x)v=Q(x)\ , \tag{23.249}$$

que é uma equação diferencial ordinária linear de primeira ordem. Resumindo a transformação $y=v^{\frac{1}{1-n}}$ transforma a equação de Bernoulli que é não linear nos casos $n\neq 0$ ou $n\neq 1$ em uma equação diferencial linear para $v(x)$.

Exemplo 23.21.
A equação diferencial

$$y'(x)-5y+\frac{5}{2}xy^3=0 \tag{23.250}$$

é uma equação de Bernoulli com $P(x)=-5$, $Q(x)=-\frac{5}{2}x$ e $n=3$. A transformação que resulta numa equação linear é $v(x)=y^{1-3}(x)=\frac{1}{y^2(x)}$, que resulta em

$$\frac{1}{1-n}v'(x)+P(x)v(x)=Q(x)\ , \tag{23.251}$$

$$-\frac{1}{2}v'(x)-5v(x)=-\frac{5}{2}x\ , \tag{23.252}$$

$$v'(x)+10v(x)=5x\ . \tag{23.253}$$

Multiplicando pela função $\mu(x)=e^{10x}$ temos

$$e^{10x}v'(x)+10e^{10x}v(x)=5xe^{10x} \tag{23.254}$$

que podemos escrever como

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[e^{10x}v(x)\right] = 5xe^{10x} , \tag{23.255}$$

que implica

$$e^{10x}v(x) = \frac{x}{2}e^{10x} - \frac{e^{10x}}{20} + C \tag{23.256}$$

e isolando $v(x)$ encontramos

$$v(x) = Ce^{-10x} + \frac{x}{2} - \frac{1}{20} . \tag{23.257}$$

Voltando para a função $y(x)$ que satisfaz $v(x) = \frac{1}{y^2(x)}$ temos finalmente

$$y(x) = \pm\frac{1}{\sqrt{Ce^{-10x} + \frac{x}{2} - \frac{1}{20}}} , \tag{23.258}$$

que é uma família de soluções da equação diferencial original. É importante notar que este método não foi capaz de encontrar a solução $y(x) = 0$, que foi "perdida" quando definimos $v(x) = \frac{1}{y^2(x)}$.

23.2.7 Equação de Riccati

Voltando ao caso geral da equação diferencial não linear de primeira ordem

$$y'(x) = f(x,y) , \tag{23.259}$$

se mantivermos x constante e aproximarmos $f(x,y)$ pela aproximação de Taylor em y obtemos a equação diferencial

$$y'(x) = p_0(x) + p_1(x)y + p_2(x)y^2 + \cdots \tag{23.260}$$

Aproximando até a segunda ordem, encontramos uma equação diferencial chamada *equação de Riccati* dada por

$$y'(x) = p_0(x) + p_1(x)y + p_2(x)y^2 . \tag{23.261}$$

Se $p_0(x)$ é uma função identicamente nula esta equação torna-se uma equação de Bernoulli com $n = 2$. Se $p_2(x)$ é identicamente nula esta equação diferencial é linear. No caso geral em que $p_0(x) \neq 0$ e $p_2(x) \neq 0$ infelizmente não existe um algoritmo capaz de resolver os casos possíveis. No entanto se encontrarmos alguma solução (por tentativa e erro) $y_0(x)$, podemos encontrar as outras soluções da mesma família definindo

$$z(x) = \frac{1}{y(x) - y_0(x)} \implies y(x) = y_0(x) + \frac{1}{z(x)} \; . \tag{23.262}$$

Pela regra da cadeia derivamos y como

$$y'(x) = y_0'(x) - \frac{1}{z^2(x)} z'(x) \; . \tag{23.263}$$

Substituindo estes resultados na equação de Riccati temos

$$y_0'(x) - \frac{1}{z^2(x)} z'(x) = p_0(x) + p_1(x) \left(y_0(x) + \frac{1}{z(x)} \right) + p_2(x) \left(y_0(x) + \frac{1}{z(x)} \right)^2 , \tag{23.264}$$

$$y_0'(x) - \frac{1}{z^2(x)} z'(x) = p_0(x) + p_1(x) y_0(x) + \frac{p_1(x)}{z(x)} + p_2(x) y_0^2(x) + \frac{2p_2(x) y_0(x)}{z(x)} + \frac{p_2(x)}{z^2(x)} , \tag{23.265}$$

$$\left[y_0'(x) - p_0(x) - p_1(x) y_0(x) - p_2(x) y_0^2(x) \right] - \frac{1}{z^2(x)} z'(x) = \frac{p_1(x)}{z(x)} + \frac{2p_2(x) y_0(x)}{z(x)} + \frac{p_2(x)}{z^2(x)} \; . \tag{23.266}$$

Como $y_0(x)$ é solução da equação de Riccati o termo entre colchetes deve ser nulo. Multiplicando os termos restantes por $-z^2$ obtemos

$$z'(x) + \left(p_1(x) + 2p_2(x) y_0(x) \right) z(x) = -p_2(x) \; , \tag{23.267}$$

que é uma equação diferencial ordinária linear de primeira ordem para a função $z(x)$. Encontrando uma família de soluções para esta função encontramos uma família de soluções da equação de Riccati dada por

$$y(x) = y_0(x) + \frac{1}{z(x)} \; . \tag{23.268}$$

Exemplo 23.22.

Seja a equação de Riccati

$$y'(x) = -2 - y + y^2 \; , \tag{23.269}$$

onde $p_0(x) = -2$, $p_1(x) = -1$ e $p_2(x) = 1$, É simples verificar que a função constante $y_0(x) = 2$ é uma solução da equação de Ricatti. Definimos então $y(x) = 2 + \frac{1}{z(x)}$, onde z é solução da equação linear

$$z'(x) + \left(p_1(x) + 2p_2(x) y_0(x) \right) z(x) = -p_2(x) \; , \tag{23.270}$$

$$z'(x) + (-1 + 2 \cdot 1 \cdot 2)\, z(x) = -1 \ , \tag{23.271}$$

$$z'(x) + 3z(x) = -1 \ , \tag{23.272}$$

cujas soluções são

$$z(x) = -\frac{1}{3} + Ce^{-3x} \ , \tag{23.273}$$

portanto a família de soluções da equação de Riccati é

$$y(x) = 2 + \frac{1}{Ce^{-3x} - \frac{1}{3}} \ . \tag{23.274}$$

23.3 Teorema de existência e unicidade

Vimos alguns exemplos de equações diferenciais cujas soluções com determinadas condições iniciais não existem, como no problema de valor inicial

$$\big(y'(x)\big)^2 + xy'(x) + y^2(x) + 1 = 0\ , \quad y(0) = 0\ . \tag{23.275}$$

Escrevendo na forma $y'(x) = f(x,y)$ temos

$$y'(x) = -\frac{x}{2} \pm \sqrt{\frac{x^2}{4} - y^2 - 1}\ . \tag{23.276}$$

No ponto $(x_0, y_0) = (0,0)$ esta função real não está definida, motivo pelo qual o problema de valor inicial não admite soluções.

Nos diversos métodos estudados tentamos encontrar soluções sem ao menos saber se elas existem. Se encontramos uma solução não sabemos também se ela é única. Além disso, se não encontramos soluções por um determinado método não sabemos se o método não se aplica ao caso estudado ou se de fato não existem soluções.

Existem diversos teoremas que garantem condições suficientes para a existência e unicidade de soluções de equações diferenciais. Os mais famosos são o teorema de Peano, que garante existência de soluções de alguns problemas de valor inicial, e o teorema de Picard-Lindelöf, que garante existência e unicidade, mas que depende de uma condição adicional.

23.3.1 Teorema de Peano

Teorema 23.4. *Seja o problema de valor inicial*

$$y'(x) = f(x,y)\ , \quad y(x_0) = y_0\ . \tag{23.277}$$

Se f é uma função contínua no retângulo fechado $Q = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$ com $a > 0$ e $b > 0$, então existe uma solução do problema de valor inicial no intervalo $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ com algum $\delta > 0$.

Demonstração. Seja δ um número positivo menor que a, de modo que $x = x_0 + \delta$ esteja na região em que f é contínua. Seja a sequência de funções

$$y_n(x) = \begin{cases} y_0\ , & \text{se } x \in \left[x_0, x_0 + \frac{\delta}{n}\right] \\ y_0 + \int\limits_{x_0}^{x - \frac{\delta}{n}} f(t, y_n(t))\mathrm{d}t\ , & \text{se } x \in \left(x_0 + \frac{\delta}{n}, x_0 + \delta\right] \end{cases} \tag{23.278}$$

No caso $n = 1$ temos

$$y_1(x) = \begin{cases} y_0 \,, & \text{se } x \in \left[x_0, x_0 + \frac{\delta}{1}\right] \\ y_0 + \int\limits_{x_0}^{x-\frac{\delta}{1}} f(t, y_1(t))\mathrm{d}t \,, & \text{se } x \in \left(x_0 + \frac{\delta}{1}, x_0 + \delta\right] \end{cases} \tag{23.279}$$

A condição $x \in \left(x_0 + \frac{\delta}{1}, x_0 + \delta\right]$ é um conjunto vazio, portanto $y_1(x) = y_0$ em todo o intervalo $[x_0, x_0 + \delta]$.

No caso $n = 2$ temos

$$y_2(x) = \begin{cases} y_0 \,, & \text{se } x \in \left[x_0, x_0 + \frac{\delta}{2}\right] \\ y_0 + \int\limits_{x_0}^{x-\frac{\delta}{2}} f(t, y_2(t))\mathrm{d}t \,, & \text{se } x \in \left(x_0 + \frac{\delta}{2}, x_0 + \delta\right] \end{cases} \tag{23.280}$$

Dividindo o intervalo $[x_0, x_0 + \delta]$ em dois sub-intervalos de mesmo comprimento $\left[x_0, x_0 + \frac{\delta}{2}\right]$ e $\left(x_0 + \frac{\delta}{2}, x_0 + \delta\right]$. No primeiro sub-intervalo a função $y_2(x)$ é constante. No segundo intervalo temos que calcular $y_2(x)$ por uma integral que aparentemente depende da própria função $y_2(x)$. Mas nesta integral a variável t varia entre x_0 e $x - \frac{\delta}{2}$. Mas no segundo sub-intervalo o valor máximo de x é $x_0 + \delta$, portanto a variável t nessa integral satisfaz $x_0 \le t \le x_0 - \frac{\delta}{2}$. Assim a função $y_2(t)$ que aparece na integral é calculada no intervalo anterior, que sabemos que é constante.

No caso $n = 3$

$$y_3(x) = \begin{cases} y_0 \,, & \text{se } x \in \left[x_0, x_0 + \frac{\delta}{3}\right] \\ y_0 + \int\limits_{x_0}^{x-\frac{\delta}{3}} f(t, y_3(t))\mathrm{d}t \,, & \text{se } x \in \left(x_0 + \frac{\delta}{3}, x_0 + \delta\right] \end{cases} \tag{23.281}$$

Agora dividimos o intervalo $[x_0, x_0 + \delta]$ em três sub-intervalos de mesmo tamanho $\left[x_0, x_0 + \frac{\delta}{3}\right]$, $\left(x_0 + \frac{\delta}{3}, x_0 + \frac{2\delta}{3}\right]$ e $\left[x_0 + \frac{2\delta}{3}, x_0 + \delta\right]$. No primeiro destes três sub-intervalos a função $y_3(x)$ é definida como a constante y_0. No segundo sub-intervalo, em que $x_0 + \frac{\delta}{3} < x \le x_0 + \frac{2\delta}{3}$, a variável t que aparece na integral satisfaz $x_0 < t < x - \frac{\delta}{3}$ que implica $x_0 < t < x + \frac{\delta}{3}$, então calculamos a função $f(t, y_3(t))$ com t pertencente ao intervalo em que $y_3(t) = y_0$, ou seja,

$$y_3(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x-\frac{\delta}{3}} f(t, y_0)\mathrm{d}t \tag{23.282}$$

que é uma função contínua. No último sub-intervalo temos $x_0 + \frac{2\delta}{3} < x \le x_0 + \delta$. A variável t que aparece na integral satisfaz $x_0 < t < x_0 + \frac{2\delta}{3}$. Então a função $y_3(t)$

da integral é calculada nos dois primeiros sub-intervalos, onde ela já foi calculada. Assim calculamos a função $y_3(x)$ em todos os sub-intervalos.

No caso geral, dividimos o intervalo $[x_0, x_0 + \delta]$ em n sub-intervalos iguais. No primeiro sub-intervalo a função $y_n(x)$ é definida como uma função constante. Nos demais sub-intervalos devemos calcular uma integral em que $y_n(t)$ é calculada nos sub-intervalos anteriores, onde a função $y_n(x)$ já foi calculada.

Com este algoritmo definimos uma sequência de funções $y_n(x)$ definida no intervalo $[x_0, x_0 + \delta]$. É importante que a imagem destas funções seja limitada pelo intervalo $[y_0 - b, y_0 + b]$ para garantir que a função f seja contínua. Pela desigualdade triangular temos que

$$|y_n(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x - \frac{\delta}{n}} f(t, y_n(t)) \mathrm{d}t \right| \leq \int_{x_0}^{x - \frac{\delta}{n}} |f(t, y_n(t))| \, \mathrm{d}t \ . \tag{23.283}$$

Seja M o máximo global de f no retângulo Q. Então

$$|y_n(x) - y_0| \leq M \left(x - \frac{\delta}{n} - x_0 \right) \leq M \left(\delta - \frac{\delta}{n} \right) \leq M\delta \ . \tag{23.284}$$

Queremos que $|y_n(x) - y_0| \leq b$, o que é garantido se $M\delta < b$. Se esta condição for satisfeita podemos escolher qualquer $\delta < a$. Caso contrário, escolhemos o menor valor entre a e b/M, ou seja, δ é um número positivo que satisfaz

$$\delta < \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\} \ . \tag{23.285}$$

Queremos provar que esta sequência de funções converge uniformemente. Se δ satisfaz a equação anterior as funções $y_n(x)$ são contínuas no intervalo $[x_0, x_0 + \delta]$. Sejam x_1 e x_2 elementos deste intervalo com $x_1 < x_2$. Pela definição da função $y_n(x)$ e pela desigualdade triangular temos

$$|y_n(x_2) - y_n(x_1)| \leq \begin{cases} 0 \,, & \text{se } x_1 \in \left[x_0, x_0 + \frac{\delta}{n}\right] \text{ e } x_2 \in \left[x_0, x_0 + \frac{\delta}{n}\right] \\ \int_{x_0}^{x_2 - \frac{\delta}{n}} |f(t, y_n(t)| \, \mathrm{d}t \,, & \text{se } x_1 \in \left[x_0, x_0 + \frac{\delta}{n}\right] \text{ e } x_2 \in \left(x_0 + \frac{\delta}{n}, x_0 + \delta\right] \\ \int_{x_1 - \frac{\delta}{n}}^{x_2 - \frac{\delta}{n}} |f(t, y_n(t)| \, \mathrm{d}t \,, & \text{se } x_1 \in \left(x_0 + \frac{\delta}{n}, x_0 + \delta\right] \text{ e } x_2 \in \left(x_0 + \frac{\delta}{n}, x_0 + \delta\right] \end{cases} \tag{23.286}$$

En todos os casos acima vale

$$|y_n(x_2) - y_n(x_1)| \leq M |x_2 - x_1| \ . \tag{23.287}$$

Além disso, $|y_n(x) - y_0| \le b$, que implica $|y_n(x)| \le |y_0| + b$. Estas condições satisfazem as hipóteses do teorema de Ascoli, que garante a convergência uniforme da sequência $y_n(x)$. Portanto existe uma função contínua

$$\bar{y}(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x) \ . \tag{23.288}$$

Tomando este limite na definição da sequência, temos

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left[y_0 + \int_{x_0}^{x-\frac{\delta}{n}} f(t, y_n(t))\mathrm{d}t \right] \ . \tag{23.289}$$

Pela aditividade da integral escrevemos

$$\bar{y}(x) = y_0 + \lim_{n\to\infty} \left[\int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\mathrm{d}t + \int_{x}^{x-\frac{\delta}{n}} f(t, y_n(t))\mathrm{d}t \right] \ . \tag{23.290}$$

Como f é contínua com máximo global M, a segunda integral é limitada por $M\frac{\delta}{n}$ e tende a zero quando n tende ao infinito. Pela convergência uniforme podemos passar a operação de limite para dentro da integral, obtendo

$$\bar{y}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \lim_{n\to\infty} f(t, y_n(t))\mathrm{d}t \tag{23.291}$$

e pela continuidade de f escrevemos

$$\bar{y}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t, \lim_{n\to\infty} y_n(t)\right) \mathrm{d}t \ , \tag{23.292}$$

que implica

$$\bar{y}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t, \bar{y}(t)\right) \mathrm{d}t \ . \tag{23.293}$$

Claramente $\bar{y}(x_0) = y_0$. Pelo segundo teorema fundamental do cálculo,

$$\bar{y}'(x) = f(x, \bar{y}(x)) \ . \tag{23.294}$$

Esta função é solução do problema de valor inicial.

□

Exemplo 23.23.

O teorema de Peano garante a existência de soluções de equações diferenciais, mas não a unicidade. Por exemplo, seja a equação diferencial

$$y'(x) = 3y^{\frac{2}{3}} \ . \tag{23.295}$$

A função $f(x,y) = y^{\frac{2}{3}}$ é contínua em todo o $\mathbb{R}^2$, então o teorema de Peano garante a existência de soluções desta equação diferencial para qualquer condição inicial. No entanto é simples verificar que se $y(0) = 0$, as funções $y_1(x) = 0$ e $y_2(x) = x^3$ satisfazem a mesma equação diferencial com a mesma condição inicial, mas possuem valores diferentes para todo $x \neq 0$.

A garantia de unicidade é dada pelo teorema de Picard, que exige uma condição adicional.

23.3.2 Teorema de Picard

Teorema 23.5. *Seja o problema de valor inicial*

$$y'(x) = f(x,y) \ , \quad y(x_0) = y_0 \ . \tag{23.296}$$

Se f e $\frac{\partial f}{\partial y}$ forem contínuas em um retângulo fechado $Q = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$, então existe algum intervalo $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ no qual o problema de valor inicial admite uma única solução.

Demonstração. De acordo com o segundo teorema fundamental do cálculo, $y(x)$ é solução do problema de valor inicial $y'(x) = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$ se e somente se for solução da equação integral

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\mathrm{d}t \ . \tag{23.297}$$

Definimos a seguinte transformação

$$T(y) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\mathrm{d}t \ . \tag{23.298}$$

Então a solução do problema de valor inicial, caso exista, satisfaz $T(y) = y$, isto é, a solução é um *ponto fixo* da transformação T. Se $y(x)$ é uma função contínua, então $T(y)$ também deve ser, pois é diferenciável já que f é supostamente contínua.

Queremos saber agora se T é uma *contração*, isto é, se existe algum intervalo em torno de x_0 no qual

$$\|T(y_1) - T(y_2)\| \leq q \, \|y_1 - y_2\| \tag{23.299}$$

com $q < 1$. Para isso utilizamos a seguinte definição de norma. Se f é uma função contínua definida no intervalo $[a,b]$,

$$\|f\| = \max_{x \in [a,b]} |f(x)| \ . \tag{23.300}$$

Com esta definição, temos que

$$|T(y_1) - T(y_2)| = \left| y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))\mathrm{d}t \; - y_0 - \int_{x_0}^{x} f(t, y_2(t))\mathrm{d}t \right| . \quad (23.301)$$

Pela linearidade da integral,

$$|T(y_1) - T(y_2)| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))\mathrm{d}t \right| . \quad (23.302)$$

Utilizando a desigualdade triangular, temos que

$$|T(y_1) - T(y_2)| \leq \int_{x_0}^{x} |f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))| \,\mathrm{d}t . \quad (23.303)$$

De acordo com o teorema do valor médio, para todo $t \in (x_0, x)$ existe algum $y_m(t)$ tal que

$$f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t)) = \frac{\partial f}{\partial y}(t, y_m(t))\,(y_1(t) - y_2(t)) . \quad (23.304)$$

Então

$$|T(y_1) - T(y_2)| \leq \int_{x_0}^{x} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, y_m(t)) \right| |y_1(t) - y_2(t)| \,\mathrm{d}t . \quad (23.305)$$

Como $\frac{\partial f}{\partial y}$ é supostamente contínua no retângulo Q, esta derivada possui um valor máximo L. Além disso, $|y_1(t) - y_2(t)| \leq \|y_1 - y_2\|$. Assim

$$|T(y_1) - T(y_2)| \leq \int_{x_0}^{x} L\,\|y_1 - y_2\|\,\mathrm{d}t = L(x - x_0)\,\|y_1 - y_2\| . \quad (23.306)$$

Queremos que o lado direito desta equação seja menor que $q\,\|y_1 - y_2\|$ com $q < 1$. Então se limitarmos o intervalo a que x pertence em $|x - x_0| < \delta$ com $\delta = \min\left\{\frac{1}{L}, 1\right\}$, temos que

$$|T(y_1) - T(y_2)| \leq L\delta\,\|y_1 - y_2\| . \quad (23.307)$$

O lado direito desta equação é um número real, portanto a função do lado esquerdo é limitada e

$$\|T(y_1) - T(y_2)\| \leq L\delta\,\|y_1 - y_2\| \quad (23.308)$$

com $L\delta = q < 1$.

Então no intervalo $|x-x_0| < \delta$ a transformação T de fato é uma contração. Pelo teorema do ponto fixo de Banach, existe um e apenas um ponto fixo desta transformação que pode ser encontrado pela sequência recursiva definida pela fórmula $y_n(x) = T(y_{n-1}(x))$ se $n > 0$ e $y_0(x) = y_0$, como será demonstrado a seguir por quatro lemas.

Lema 1: $\|y_{n+1} - y_n\| \leq q^n \|y_1 - y_0\|$.

Demonstramos o lema 1 por indução. Se $n = 0$, é trivial verificar que o lema é verdadeiro, pois $\|y_1 - y_0\| = q^0 \|y_1 - y_0\|$. Agora provamos que o caso $n+1$ é válido supondo que o caso arbitrário n também seja. Pela definição recursiva da sequência,

$$\|y_{n+2} - y_{n+1}\| = \|T(y_{n+1}) - T(y_n)\| \ . \tag{23.309}$$

Como T é uma contração,

$$\|y_{n+2} - y_{n+1}\| \leq q \|y_{n+1} - y_n\| \ . \tag{23.310}$$

Pela hipótese de indução, o lema é válido no caso n, portanto

$$\|y_{n+2} - y_{n+1}\| \leq qq^n \|y_2 - y_1\| = q^{n+1} \|y_2 - y_1\| \ . \tag{23.311}$$

Por indução está provado o lema 1.

Lema 2: A sequência $y_n(x)$ converge uniformemente.

Podemos escrever a diferença $y_n(x) - y_0(x)$ como uma soma telescópica

$$y_n(x) - y_0 = \sum_{k=0}^{n-1} y_{k+1}(x) - y_k(x) \tag{23.312}$$

e mostrar que esta série converge uniformemente. De acordo com o lema 1

$$|y_{k+1}(x) - y_k(x)| \leq \|y_{k+1} - y_k\| \leq q^k \|y_1 - y_0\| \ . \tag{23.313}$$

Então os elementos $|y_{k+1}(x) - y_k(x)|$ são limitados por uma série geométrica convergente de razão $q < 1$ e que portanto converge, Pelo teste M de Weierstrass, a série telescópica converge uniformemente. Logo existe uma função contínua

$$\bar{y}(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x) \ . \tag{23.314}$$

Lema 3: $\bar{y}(x)$ é um ponto fixo de T.

Pela definição recursiva, $y_{n+1}(x) = T(y_n(x))$. Tomando o limite desta equação temos

$$\begin{aligned}
\bar{y}(x) &= \lim_{n\to\infty} y_{n+1}(x) = \lim_{n\to\infty} \left[y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t)) \mathrm{d}t \right] \\
&= y_0 + \int_{x_0}^{x} \lim_{n\to\infty} f(t, y_n(t)) \mathrm{d}t = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t, \lim_{n\to\infty} y_n(t)\right) \mathrm{d}t \\
&= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \bar{y}(t)) \mathrm{d}t = T(\bar{y}(x)) \ .
\end{aligned} \tag{23.315}$$

Lema 4: $\bar{y}(x)$ é o único ponto fixo de T.

Sejam $\bar{y}$ e $\tilde{y}$ pontos fixos de T. Pela desigualdade triangular,

$$\|\bar{y}-\tilde{y}\| \leq \|\bar{y}-T(\bar{y})\| + \|T(\bar{y})-T(\tilde{y})\| + \|T(\tilde{y})-\tilde{y}\| \ . \tag{23.316}$$

Como $\bar{y}$ e $\tilde{y}$ são pontos fixos de T, $\|\bar{y}-T(\bar{y})\| = 0$ e $\|T(\tilde{y})-\tilde{y}\|$. Logo

$$\|\bar{y}-\tilde{y}\| \leq \|T(\bar{y})-T(\tilde{y})\| \ . \tag{23.317}$$

Como T é uma contração,

$$\|\bar{y}-\tilde{y}\| \leq q\,\|\bar{y}-\tilde{y}\| \ , \tag{23.318}$$

que implica

$$0 \leq (1-q)\,\|\bar{y}-\tilde{y}\| \leq 0 \ . \tag{23.319}$$

Como $q<1$, necessariamente $\|\bar{y}-\tilde{y}\| = 0$, ou seja, $\bar{y}=\tilde{y}$. Este lema encerra a demonstração.

$\square$

Exemplo 23.24.

Vimos que o problema de valor inicial

$$y'(x) = 3y^{\frac{2}{3}} \ , \quad y(0) = 0 \tag{23.320}$$

admite duas soluções distintas. Neste exemplo temos que

$$f(x,y) = 3y^{\frac{2}{3}} \ , \tag{23.321}$$

que é contínua no ponto $(0,0)$, mas

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{\sqrt[3]{x}} \ , \tag{23.322}$$

que não é contínua se $x=0$. Por este motivo este exemplo viola as condições do teorema de Picard e mais de uma solução podem existir.

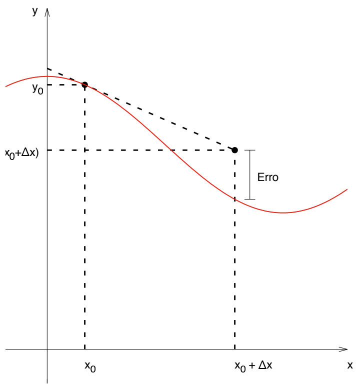
23.4 Métodos numéricos

23.4.1 Método de Euler

Seja o problema de valor inicial

$$y'(x) = f(x,y) \ , \quad y(x_0) = y_0 \tag{23.323}$$

onde f e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em algum retângulo que contém a condição inicial. Pelo teorema de Picard existe uma única solução deste problema de valor inicial, mas em muitos casos os algoritmos apresentados não são capazes de encontrar a solução. Nestes casos podemos contar com uma aproximação da solução por algum método numérico. O método numérico mais simples chama-se *método de Euler*.



Seja $\bar{y}(x)$ a solução cuja existência e unicidade é garantida pelo teorema de Picard. Não conhecemos o gráfico desta função, mas sabemos que a curva $y = \bar{y}(x)$ deve passar pela condição inicial (x_0, y_0).
Podemos também calcular a reta tangente à curva $y = \bar{y}(x)$ no ponto (x_0, y_0) e estimar o valor de $\bar{y}(x_0 + \Delta x)$ pelo incremento ao longo da reta tangente. Pela aproximação de Taylor de primeira ordem temos que

$$\bar{y}(x_0 + \Delta x) = \bar{y}(x_0) + \bar{y}'(x_0)\Delta x + O(\Delta x^2) \ . \tag{23.324}$$

Desprezando os termos de segunda ordem ou maior na aproximação, substituindo $\bar{y}(x_0) = y_0$ e $\bar{y}'(x_0) = f(x_0, y(x_0)) = f(x_0, y_0)$ escrevemos a aproximação como

$$\bar{y}(x_0 + \Delta x) = y_0 + f(x_0, y_0)\Delta x \ . \tag{23.325}$$

Evidentemente esta aproximação é boa apenas em uma vizinhança pequena de x_0. Imagine que queremos calcular a solução do problema de valor inicial num ponto $x > x_0$ não tão próximo assim, como na figura 23.2. Dividimos o intervalo $[x_0, x]$ em dois sub-intervalos $[x_0, x_1]$ e $[x_1, x_2]$ de tamanho $\Delta x = \frac{x - x_0}{2}$. A partir da condição inicial (x_0, y_0) calculamos o ponto (x_1, y_1) por

$$x_1 = x_0 + \Delta x \ , \tag{23.326}$$
$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)\Delta x \ . \tag{23.327}$$

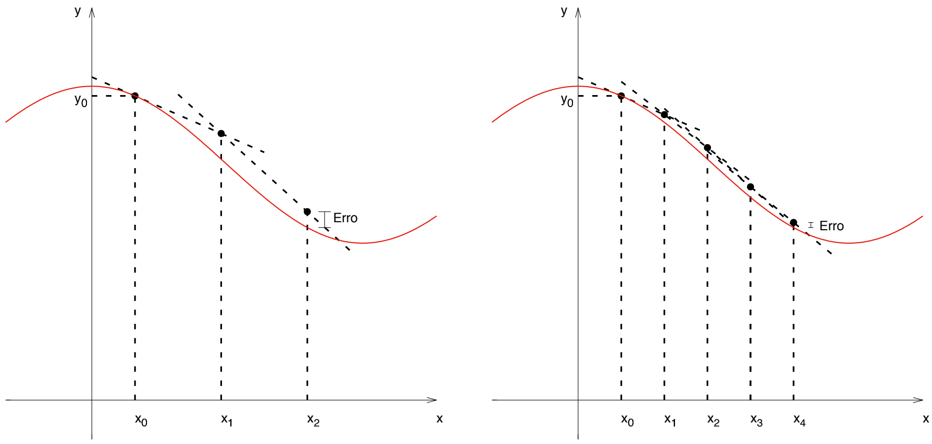


Figura 23.1: Quanto maior o número de passos entre a condição inicial e o valor de x desejado, menor o erro da aproximação.

No ponto (x_1,y_1) calculamos novamente a inclinação da solução pela equação diferencial pela expressão $y'(x_1) = f(x_1,y_1)$ e assim calculamos o próximo ponto (x_2,y_2) por

$$x_2 = x_1 + \Delta x \,, \tag{23.328}$$
$$y_2 = y_1 + f(x_1,y_1)\Delta x \,. \tag{23.329}$$

Com este ponto intermediário a aproximação calculada para a solução em $x = x_2$ será provavelmente mais próxima da solução verdadeira que a aproximação com apenas um passo. Se dividirmos o intervalo $[x_0,x]$ em quatro sub-intervalos a aproximação será ainda melhor.

Seja $[a,b]$ o intervalo no qual queremos estimar a solução do problema de valor inicial $y'(x) = f(x,y)$ e $y(x_0) = f(x_0)$, onde $a = x_0$. Escolhemos uma partição P que divide o intervalo $[a,b]$ em N sub-intervalos de mesmo tamanho $\Delta x = \frac{b-a}{N}$, isto é,

$$P = \{x_0,x_1,x_2,\ldots,x_{N-1},x_N\} \tag{23.330}$$

onde

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{N-1} < x_N = b \,. \tag{23.331}$$

Cada x_k pode ser calculado como $x_k = x_0 + k\cdot\Delta x$. Com esta partição montamos uma tabela dos diversos valores (x_k,y_k) com (x_0,y_0) dados pela condição inicial e

$$x_k = x_{k-1} + \Delta x \,, \tag{23.332}$$
$$y_k = y_{k-1} + f(x_{k-1},y_{k-1})\Delta x \,, \tag{23.333}$$

se $k > 0$. Quanto menores forem os sub-intervalos da partição P, melhor é a aproximação da solução, mas também maior é o número de contas a serem feitas. Em alguns casos o número de contas exigidas para manter uma certa precisão é muito grande.

Intuitivamente podemos perceber que o erro da aproximação feita pelo método de Euler é maior quanto maior for a curvatura da solução $y = \bar{y}(x)$ no ponto (x_0, y_0). Se soubermos calcular ou estimar esta curvatura podemos utilizar esta informação e corrigir a estimativa do método de Euler. Seja então $y = \bar{y}(x)$ a solução da equação diferencial $y'(x) = f(x,y)$ que passa pelo ponto (x_0, y_0), cuja existência e unicidade é garantida pelo teorema de Picard, mas que não sabemos calcular analiticamente, portanto devemos estimar o valor de $\bar{y}(x)$ no ponto $x = x_0 + \Delta x$. Expandindo $\bar{y}(x_0 + \Delta x)$ em série de Taylor até segunda ordem temos

$$\bar{y}(x_0 + \Delta x) = \bar{y}(x_0) + \bar{y}'(x_0)\Delta x + \frac{1}{2}\bar{y}''(x_0)\Delta x^2 + O(\Delta x^3)\ . \tag{23.334}$$

Do problema de valor inicial sabemos que $\bar{y}(x_0) = y_0$, $\bar{y}'(x_0) = f(x_0, \bar{y}(x_0)) = f(x_0, y_0)$. A segunda derivada pode ser calculada como

$$\bar{y}''(x_0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}\bar{y}}{\mathrm{d}x}\right)\bigg|_{x=x_0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f(x,y)\right)\bigg|_{(x_0,y_0)}\ . \tag{23.335}$$

Calculando a derivada total de $f(x,y)$ em relação a x temos

$$\bar{y}''(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\bigg|_{(x_0,y_0)}\ . \tag{23.336}$$

A derivada $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ pode ser calculada pela equação diferencial, resultando em

$$\bar{y}''(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + f(x_0,y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\ . \tag{23.337}$$

Assim a nova aproximação para $\bar{y}(x_0 + \Delta x)$ é calculada como

$$\bar{y}(x_0 + \Delta x) = y_0 + f(x_0,y_0)\Delta x + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + f(x_0,y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)\Delta x^2 + O(\Delta x^3)\ . \tag{23.338}$$

A desvantagem desta fórmula é além de $f(x,y)$ precisamos calcular também as derivadas parciais desta função, o que pode ser um processo custoso. Mas estas derivadas podem também ser estimadas pela combinação linear de inclinações da solução $y = \bar{y}(x)$ em pontos distintos da curva, de acordo com uma classe de métodos conhecidos como *métodos de Runge-Kutta*.

23.4.2 Métodos de Runge-Kutta

Definimos

$$k_1 = f(x_0, y_0) , \tag{23.339}$$

$$k_2 = f(x_0 + \alpha \Delta x, y_0 + \beta k_1 \Delta x) . \tag{23.340}$$

O termo k_1 é a inclinação da solução $\bar{y}(x)$ em $x = x_0$ como utilizada no método de Euler. O termo k_2 é também a inclinação da solução $\bar{y}(x)$, mas agora calculada num ponto arbitrário dado por α e β. Os valores de Δx e k_1 foram incluídos na definição de k_2 para que os termos α e β sejam adimensionais.

Queremos aproximar

$$\bar{y}(x_0 + x) \simeq y_0 + (ak_1 + bk_2)\Delta x , \tag{23.341}$$

ou seja, estimamos o valor da solução $\bar{y}(x_0 + \Delta x)$ a partir da condição inicial (x_0, y_0) por uma reta cuja inclinação é esta combinação linear de k_1 e k_2 com coeficientes adimensionais a e b. Se $a = 1$ e $b = 0$ recuperamos o método de Euler. Como k_2 será multiplicado por Δx, para obter as correções de segunda ordem de $\bar{y}(x_0 + \Delta x)$ precisamos calcular a aproximação de Taylor de k_2 até a primeira ordem apenas. Calculamos então

$$k_2 = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(\alpha \Delta x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(\beta k_1 \Delta x) + O(\Delta x^2) , \tag{23.342}$$

onde substituímos $k_1 = f(x_0, y_0)$ para obter

$$k_2 = f(x_0, y_0) + \alpha \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \beta f(x_0, y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta x + O(\Delta x^2) . \tag{23.343}$$

Substituindo estes valores de k_1 e k_2 na aproximação $\bar{y}(x_0 + \Delta x) = y_0 + \frac{1}{2}(ak_1 + bk_2)\Delta x$ temos

$$\bar{y}(x_0 + \Delta x) = y_0 + (a+b) f(x_0, y_0)\Delta x + b\left[\alpha \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \beta f(x_0, y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right]\Delta x^2 + O(\Delta x^3) . \tag{23.344}$$

Comparando com a aproximação de Taylor de segunda ordem

$$\bar{y}(x_0 + \Delta x) = y_0 + f(x_0, y_0)\Delta x + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + f(x_0, y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)\Delta x^2 + O(\Delta x^3) \tag{23.345}$$

precisamos escolher os valores de a, b, α e β tais que

$$a + b = 1 , \quad b \cdot \alpha = \frac{1}{2} , \quad b \cdot \beta = \frac{1}{2} . \tag{23.346}$$

Temos um sistema não linear de três equações e quatro icógnitas. Existem infinitas soluções deste sistema e cada solução define um método de Runge-Kutta de segunda ordem diferente. Uma escolha comum é impor $a = \frac{1}{2}$, que implica $b = \frac{1}{2}$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$ e

$$\bar{y}(x_0 + \Delta x) \simeq y_0 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)\Delta x \,, \tag{23.347}$$

onde

$$k_1 = f(x_0, y_0) \quad \text{e} \quad k_2 = f(x_0 + \Delta x, y_0 + k_1 \Delta x) \,. \tag{23.348}$$

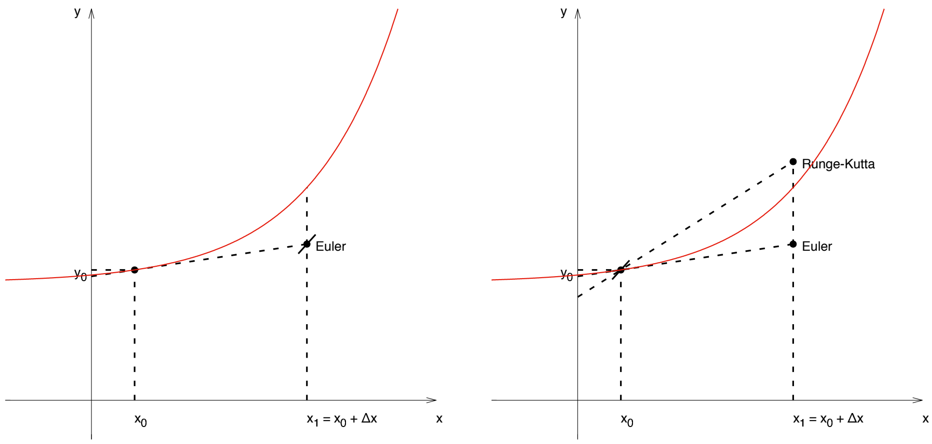


Figura 23.2: No ponto calculado pelo método de Euler calculamos a inclinação da solução. A aproximação do método de Runge-Kutta de segunda ordem é dada pela média simples entre as duas inclinações.

Esta escolha tem a seguinte interpretação geométrica. Pela aproximação do método de Euler o ponto encontrado em $x = x_0 + \Delta x$ seria $(x_0 + \Delta x, y_0 + k_1 \Delta x)$. Neste ponto calculamos a inclinação da solução da equação diferencial que passa por $(x_0 + \Delta x, y_0 + k_1 \Delta x)$, que é igual a k_2. Aproximamos $\bar{y}(x_0 + \Delta x)$ pelo incremento ao longo de uma reta cuja inclinação é a média simples entre k_1 e k_2, obtendo assim uma estimativa melhor que a prevista pelo método de Euler.

Podemos calcular uma terceira inclinação k_3 em algum outro ponto e definir um método de Runge-Kutta de terceira ordem. Podemos também calcular quatro inclinações k_1, k_2, k_3 e k_4 e definir métodos de Runge-Kutta de quarta ordem. Aumentando a ordem melhoramos a aproximação, mas aumentamos também o número de contas que precisamos fazer a cada passo. Existe um certo equilíbrio entre a precisão do método e o custo de cada passo. O consenso é um método de quarta ordem referido como $RK4$. Neste método cada inclinação é calculada num ponto ao longo de uma reta definida pelas inclinações anteriores, isto é,

$$k_1 = f(x_0, y_0) \;, \tag{23.349}$$
$$k_2 = f(x_0 + \alpha_2 \Delta x, y_0 + \beta_{21} k_1 \Delta x) \;, \tag{23.350}$$
$$k_3 = f(x_0 + \alpha_3 \Delta x, y_0 + \beta_{31} k_1 \Delta x + \beta_{32} k_2 \Delta x) \;, \tag{23.351}$$
$$k_4 = f(x_0 + \alpha_4 \Delta x, y_0 + \beta_{41} k_1 \Delta x + \beta_{42} k_2 \Delta x + \beta_{43} k_3 \Delta x) \tag{23.352}$$

e a aproximação é calculada como

$$\bar{y}(x_0 + \Delta x) = y_0 + (ak_1 + bk_2 + ck_3 + dk_4)\,\Delta x \;. \tag{23.353}$$

Agora devemos expandir $\bar{y}(x_0 + \Delta x)$ até o termo de quarta ordem na série de Taylor. As expressões para k_1, k_2, k_3 e k_4 devem ser expandidas até terceira ordem pois são multiplicadas por Δx. Estas contas são semelhantes à dedução do método de segunda ordem, apenas mais trabalhosa. Comparando termo a termo as fórmulas encontradas temos que os coeficientes a serem determinados devem obedecer os vínculos

$$a + b + c + d = 1 \;, \tag{23.354}$$
$$b\alpha_2 + c\alpha_3 + d\alpha_4 = \frac{1}{2} \;, \tag{23.355}$$
$$b\alpha_2^2 + c\alpha_3^2 + d\alpha_4^2 = \frac{1}{3} \;, \tag{23.356}$$
$$b\alpha_2^3 + c\alpha_3^3 + d\alpha_4^3 = \frac{1}{4} \;, \tag{23.357}$$
$$c\alpha_2\beta_{32} + d\alpha_2\beta_{42} + d\alpha_3\beta_{43} = \frac{1}{6} \;, \tag{23.358}$$
$$c\alpha_2\alpha_3\beta_{32} + d\alpha_2\alpha_4\beta_{42} + d\alpha_3\alpha_4\beta_{43} = \frac{1}{8} \;, \tag{23.359}$$
$$c\alpha_2^2\beta_{32} + d\alpha_2^2\beta_{42} + d\alpha_3^2\beta_{43} = \frac{1}{12} \;, \tag{23.360}$$
$$d\alpha_2\beta_{32}\beta_{43} = \frac{1}{24} \;. \tag{23.361}$$

Além destes vínculos, para que cada inclinação seja calculada numa reta definida pelas inclinações anteriores, é necessário que

$$\alpha_2 = \beta_{21} \;, \tag{23.362}$$
$$\alpha_3 = \beta_{31} + \beta_{32} \;, \tag{23.363}$$
$$\alpha_4 = \beta_{41} + \beta_{42} + \beta_{43} \;. \tag{23.364}$$

Temos assim um sistema não linear de onze equações e treze icógnitas, então existem duas escolhas que podem ser feitas para determinar um método de quarta ordem. Se escolhermos $\alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{2}$, temos $a = \frac{1}{6}$, $b = \frac{1}{3}$, $c = \frac{1}{3}$, $d = \frac{1}{6}$, $\alpha_4 = 1$, $\beta_{21} = \frac{1}{2}$, $\beta_{31} = 0$, $\beta_{32} = \frac{1}{2}$, $\beta_{41} = 0$, $\beta_{42} = 0$, $\beta_{43} = 1$. Com estes parâmetros o método de Runge-Kutta de quarta ordem obtido é

$$\bar{y}(x_0 + \Delta x) = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\Delta x \tag{23.365}$$

com

$$k_1 = f(x_0, y_0) \ , \tag{23.366}$$

$$k_2 = f\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\Delta x\right) \ , \tag{23.367}$$

$$k_3 = f\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\Delta x\right) \ , \tag{23.368}$$

$$k_4 = f(x_0 + \Delta x, y_0 + k_3\Delta x) \ . \tag{23.369}$$

Exemplo 23.25 (Aproximação de e)**.**
O problema de valor inicial

$$y'(x) = y \ , \quad y(0) = 1 \tag{23.370}$$

possui uma única solução dada por $y(x) = e^x$. Em $x = 1$ temos que $y(1) = e$. Queremos calcular uma aproximação para e pelos métodos de Euler, Runge-Kutta de segunda ordem e Runge-Kutta de quarta ordem. Neste exemplo temos que $(x_0, y_0) = (0, 1)$, $\Delta x = 1$ e $f(x, y) = y$. Pelo método de Euler temos

$$e = y(1) = y(x_0 + \Delta x) \simeq y_0 + f(x_0, y_0)\Delta x = 1 + 1 \cdot 1 = 2 \ . \tag{23.371}$$

Pelo método de Runge-Kutta de segunda ordem, calculamos

$$k_1 = f(x_0, y_0) = f(0, 1) = 1 \ , \tag{23.372}$$

$$k_2 = f(x_0 + \Delta x, y_0 + k_1\Delta x) = f(1, 2) = 2 \ , \tag{23.373}$$

$$e = y(1) = y(x_0 + \Delta x) \simeq y_0 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)\Delta x = 1 + \frac{1}{2}(1 + 2)1 = 2.5 \ . \tag{23.374}$$

Finalmente pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem temos

$$k_1 = f(x_0, y_0) = f(0, 1) = 1 \ , \tag{23.375}$$

$$k_2 = f\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\Delta x\right) = f\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\ , \tag{23.376}$$

$$k_3 = f\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\Delta x\right) = f\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{4}\right) = \frac{7}{4}\ , \tag{23.377}$$

$$k_4 = f\left(x_0 + \Delta x, y_0 + k_3\Delta x\right) = f\left(1, \frac{13}{4}\right) = \frac{13}{4} \tag{23.378}$$

e

$$\begin{aligned} e &= y(1) = y(x_0 + \Delta x) \simeq y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\Delta x \\ &= 1 + \frac{1}{6}\left(1 + 2\cdot\frac{3}{2} + 2\cdot\frac{7}{4} + \frac{13}{4}\right)1 = \frac{67}{24} = 2.79666\ldots \end{aligned} \tag{23.379}$$

Exemplo 23.26 (Aproximação de π)**.**
O problema de valor inicial

$$y'(x) = 4\cos^2\left(\frac{y}{4}\right)\ , \quad y(0) = 0 \tag{23.380}$$

possui uma única solução dada por $y(x) = 4\arctan(x)$ no domínio $(-\infty, +\infty)$. Em $x = 1$ temos que $y(1) = 4\arctan(1) = \pi$. Queremos calcular uma aproximação para π pelos métodos de Euler, Runge-Kutta de segunda ordem e Runge-Kutta de quarta ordem. Neste exemplo temos que $(x_0, y_0) = (0, 0)$, $\Delta x = 1$ e $f(x, y) = 4\cos^2\left(\frac{y}{4}\right)$. Pelo método de Euler temos

$$\pi = y(1) = y(x_0 + \Delta x) \simeq y_0 + f(x_0, y_0)\Delta x = 0 + f(0, 0)\cdot 1 = 4\ . \tag{23.381}$$

Pelo método de Runge-Kutta de segunda ordem, calculamos

$$k_1 = f(x_0, y_0) = f(0, 0) = 4\ , \tag{23.382}$$

$$k_2 = f(x_0 + \Delta x, y_0 + k_1\Delta x) = f(1, 4) = 4\cos^2(1) \simeq 1.1677\ , \tag{23.383}$$

$$\pi = y(1) = y(x_0 + \Delta x) \simeq y_0 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)\Delta x = 0 + \frac{1}{2}(4 + 1.1677)1 = 2.5839\ .$$

(23.384)

Finalmente pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem temos

$$k_1 = f(x_0, y_0) = f(0,0) = 4 \ , \tag{23.385}$$

$$k_2 = f\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\Delta x\right) = f\left(\frac{1}{2}, 2\right) = 3.0806 \ , \tag{23.386}$$

$$k_3 = f\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\Delta x\right) = f\left(\frac{1}{2}, 1.5403\right) = 3.4356 \ , \tag{23.387}$$

$$k_4 = f\left(x_0 + \Delta x, y_0 + k_3 \Delta x\right) = f\left(1, 3.4356\right) = 1.7071 \tag{23.388}$$

e

$$\begin{aligned} \pi &= y(1) = y(x_0 + \Delta x) \simeq y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\Delta x \\ &= \frac{1}{6}(4 + 2 \cdot 3.0806 + 2 \cdot 3.4356 + 1.7071)\,1 = 3.1233 \end{aligned} \tag{23.389}$$